Université de Rennes 1 Année 2008–2009
UFR Mathématiques
Module S4, ED1

Feuille d'exercices 7

Exercice 1 (a) Exprimer les équations ci-dessous comme systèmes du premier ordre.

$$(i)\ x'' + 3x' + 5x = 0 \qquad (ii)\ x'' + 3tx' = t \qquad (iii)\ x'' + xx' = 0$$

(b) (difficile) Lorsqu'une équation $f(x'', x', x, t) = 0$ ne dépend pas explicitement d'une des variables x ou t, une méthode classique de résolution consiste à poser $y = x'$. On se ramène alors à une équation du premier ordre :

- si x n'apparaît pas, c.à.d. si l'on a $f(x'', x', t) = 0$, alors on a $f(y', y, t) = 0$
- si t n'apparaît pas, c.à.d. si l'on a $f(x'', x', x) = 0$, on remarque que

$$x'' = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = y\frac{dy}{dx}$$

  et on trouve l'équation

$$f(y\frac{dy}{dx}, y, x) = 0$$

Si on sait résoudre l'équation du premier ordre en y, on trouve x par un calcul de primitive. Appliquer cette méthode aux équations de la question (a).

Exercice 2 Tracer à la main l'allure des portraits de phase (dans le plan de phase (x, y) des systèmes ci-dessous. Commencer par tracer les isoclines horizontales et verticales, puis indiquer la direction du champ dans les régions ainsi délimités (NE, NO, SE ou SO). Tracer alors quelques trajectoires typiques compatibles avec ces données.

$$(a) \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x \\ y' & = & x - y \end{array} \right. \qquad (b) \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x \\ y' & = & y - x \end{array} \right. \qquad (c) \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x \\ y' & = & (x - y)^2 \end{array} \right.$$

$$(d) \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x \\ y' & = & x^2 - y^2 \end{array} \right. \qquad (e) \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & y \\ y' & = & x^2 - y^2 \end{array} \right. \qquad (f) \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & y + x^2 - 1 \\ y' & = & x^2 - y^2 \end{array} \right.$$

Exercice 3 (Cet exercice n'est faisable que si vous avez déjà vu le TP sur l'éequation de Lotka-Volterra). L'équation de Volterra (vu en TD) modélise la relation proie-prédateur. Il se peut aussi que deux espèces soient en compétition car devant se partager la même nourriture.

(a) Soient $x(t)$ et $y(t)$ les populations de deux telles espèces. Expliquer en quoi le système

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & (a_1 - b_1x - c_1y)x \\ y' & = & (a_2 - b_2x - c_2y)y \end{array} \right.$$

(où les constantes a_i, b_i, c_i sont positives) modélise l'évolution de ces populations : on repérera les termes provenant de la compétition à l'intérieur de chaque espèce et ceux provenant de la compétition entre espèces.

(b) Seul le quadrant $x > 0$, $y > 0$ nous intéresse. Montrer que les isoclines horizontales et verticales y sont des segments de droites et que la figure montre les quatres cas possibles des positions relatives de ces segments.

(c) Dans chaque cas de figure, déterminer dans chaque région la direction du champ. Tracer des trajctoires orientées compatibles avec ces indications.

(d) Dans chaque cas de figure, interpréter les résultats : est-ce que les deux espèces vont survivre à long terme, ou est-ce que une des deux espèces va s'éteindre ?

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ Déterminer une base de l'espace des solutions de $x''' - x = 0$.

Solution $\exp(t), \exp(-\frac{t}{2})\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t), \exp(-\frac{t}{2})\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ (a) Trouver une base de l'espace des solutions de $x^{(4)} + 8x'' + 16x = 0$. Indication : $\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = (\lambda^2 + 4)^2$.

(b) Trouver une solution $u(t)$ de cette équation qui vérifie $u(0) = 1$, $u'(0) = 1$, $u''(0) = 0$, $u'''(0) = 4$. (Rq : la partie (b) nécessite des calculs un peu lourds.)

Solution (a) Le polynôme $\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16$ a deux racines doubles, une à $2i$, l'autre à $-2i$. On a donc comme base $\{\cos(2t), \sin(2t), t \cdot \cos(2t), t \cdot \sin(2t)\}$.

(b) si $u(t) = c_1 \cos(2t) + \ldots + c_4 t \sin(2t)$, on calcule u', u'' et u''', et en comparant des coefficients on trouve $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = -1$, $c_4 = 1$.

$\boxed{\textbf{Exercice 6}}$ Considérons l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\mu\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

où ω_0 et μ sont des constantes réelles positives. Déterminer l'ensemble des solutions. (Indication : il faudra distinguer trois cas : $\mu < \omega_0$, $\mu = \omega_0$, et $\mu > \omega_0$.) Donner une interprétation physique de vos résultats.

Solution Si $\mu < \omega_0$ on trouve les solutions

$$c_1 \exp(-\mu t)\cos(\omega t) + c_2 \exp(-\mu t)\sin(\omega t), \quad \text{où} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$$

Si $\mu = \omega_0$, c'est $c_1 \exp(-\mu t) + c_2 t \exp(-\mu t)$,
Si $\mu > \omega_0$, c'est

$$c_1 \exp(\mu_1 t) + c_2 \exp(\mu_2 t), \quad \text{où} \quad \mu_1, \mu_2 = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$$

Attention, dans le troisième cas, μ_1 et μ_2 sont tous les deux négatifs.

Exercice 7 Trouver toutes les solutions de l'équation $x''' + 2x'' + x' = t$.

Solution Regardons d'abord l'équation homogène associée $x''' + 2x'' + x' = 0$. Le polynome $P(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda$ a une racine simple à 0 et une racine double à -1. L'équation homogène a donc une base de solutions $\{1, e^{-t}, te^{-t}\}$

Pour trouver une solution particulière de $x''' + 2x'' + x' = t = t\exp(0t)$, on remarque que 0 est une racine de multiplicité 1 de P, et t est un polynôme de degré 1, donc il doit y avoir une solution de la forme $u_p(t) = f(t)\exp(0t) = f(t)$, où $f(t)$ est un polynôme de degré $1 + 1 = 2$. En posant $u_p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ et en remplacant dans l'équation, on trouve a_0 arbitraire, $a_1 = -2$, et $a_2 = \frac{1}{2}$, c.à.d. $u_p(t) = -2t + \frac{1}{2}t^2$. Donc les solutions de l'équation originale sont

$$\frac{1}{2}t^2 - 2t + c_1 + c_2 e^{-t} + c_3 t e^{-t}$$

Exercice 8 On considère l'équation d'un ressort sous l'influence d'une force extérieure

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \cos(\omega t)$$

Trouver une solution particulière de cette équation. Indication : il faudra distinguer deux cas, $\omega \neq \omega_0$ et $\omega = \omega_0$. Le premier cas a déjà été fait en cours. Le deuxième cas s'appelle le cas de la résonance – vous observerez un comportement catastrophique.

Solution On reécrit $P(\frac{d}{dt})x = \frac{1}{2}e^{i\omega t} + \frac{1}{2}e^{-i\omega t}$, où $P(\lambda) = \lambda^2 + \omega_0^2$.
Si $\omega \neq \omega_0$, alors selon le principe de superposition on a une solution particulière

$$u_p(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{P(i\omega)}e^{i\omega t} + \frac{1}{2}\frac{1}{P(-i\omega)}e^{-i\omega t} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega t)$$

Si $\omega = \omega_0$, alors $\pm i\omega$ sont des racines simples du polynôme P. L'équation $P(\frac{d}{dt})x = \frac{1}{2}e^{i\omega t}$ a donc une solution particuliére de la forme $u_1(t) = c{\cdot}t{\cdot}e^{i\omega t}$. Comme $P(\frac{d}{dt})c{\cdot}t{\cdot}e^{i\omega t} = 2i{\cdot}c{\cdot}\omega e^{i\omega t}$, on trouve $c = \frac{1}{4i\omega}$.

De façon semblable, l'équation $P(\frac{d}{dt})x = \frac{1}{2}e^{-i\omega t}$ a une solution $u_2(t) = \frac{-1}{4i\omega}t \cdot e^{-i\omega t}$, et par superposition on trouve la solution particulière

$$u_p(t) = \frac{1}{4i\omega}t \cdot e^{i\omega t} - \frac{1}{4i\omega}t \cdot e^{-i\omega t} = \frac{1}{2\omega}t \cdot \sin(\omega t)$$

Remarquez que l'amplitude du mouvement de la voiture tend vers $+\infty$ (donc le ressort va casser), et qu'il est décalé par un quart de phase par rapport à la force extérieure.