

Feuille d'exercices 6

Points d'inflexion des solutions

Exercice 1 (a) Déterminer l'ensemble des points d'inflexion des solutions de notre équation différentielle préférée, $x' = x^2 - t$.

(b) Sur un seul dessin, dessinez quelques solutions de cette équation différentielle, et avec une autre couleur l'ensemble des points d'inflexion. (J'avoue qu'il est difficile d'obtenir un dessin clair et net.)

Dans notre situation, $f(t, x) = x^2 - t$. Donc $0 = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot f$ si et seulement si $0 = -1 + 2x \cdot (x^2 - t)$, si et seulement si $t = x^2 - \frac{1}{2x}$. L'ensemble des points d'inflexion est en rouge sur le dessin.

Équations différentielles exactes

Exercice 2 Considérons l'équation

$$x' = \frac{ct - ax}{at + bx}.$$

On remarque que cette équation n'est pas définie sur la droite $at + bx = 0$.

(a) Démontrer qu'il s'agit d'une équation différentielle exacte, et trouver une fonction $F(t, x)$ telle que les solutions de l'équation différentielle suivent des lignes de niveau de la fonction F .

(b) Plus difficile : décrire et dessiner les graphes des solutions. Indication : il faudra distinguer selon le signe de la quantité $a^2 + bc$.

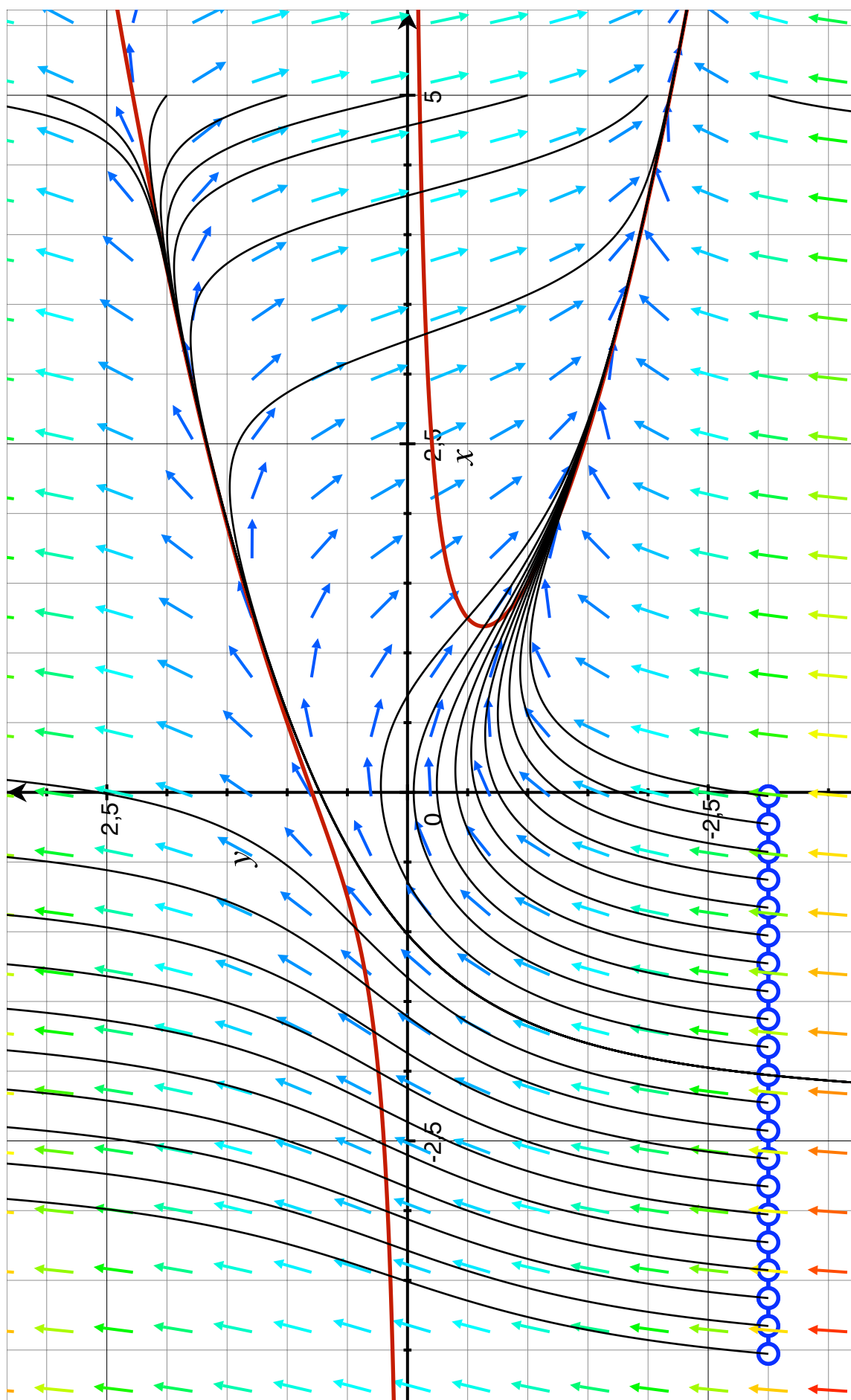
Solution : il s'agit de l'Exemple 2.15 du livre.

Exercice 3 Considérons un pendule constitué d'une bille de masse m au bout d'une fine tige de longueur ℓ , qui se meut dans un plan vertical (voir figure). Nous observons que l'accélération de la bille est $\ell\theta''$, et la force de la gravité agissant dans la direction tangentielle du mouvement est $-mg \sin(\theta)$, où g est l'accélération terrestre $9,81 \frac{m}{s^2}$. On en déduit que ce système est décrit par l'équation différentielle $m\ell\theta'' = -mg \sin(\theta)$, ou encore

$$\theta'' = -K \sin(\theta), \quad \text{où} \quad K = \frac{g}{\ell}$$

De façon équivalente, on a le système

$$\begin{aligned} \theta' &= y \\ y' &= -K \sin(\theta) \end{aligned}$$



(a) Montrer que la quantité

$$E(\theta, y) = \frac{y^2}{2} - K \cos(\theta)$$

est constante sur les trajectoires des solutions dans le plan de phase (θ, y) . Quel est le sens physique de cette quantité ?

(b) Dessiner approximativement quelques lignes de niveau de cette fonction E , et expliquer les différentes possibilités pour le mouvement du pendule.

Solution (a) Si l'on dérive la fonction $E(\theta(t), y(t))$ par rapport au temps t , on trouve $\frac{\partial}{\partial t} E(\theta(t), y(t)) = \frac{\partial E}{\partial \theta} \cdot \theta' + \frac{\partial E}{\partial y} \cdot y' = K \cdot \sin(\theta) \cdot \theta' + y \cdot y' = K \cdot \sin(\theta) \cdot y + y \cdot y' = y(K \sin(\theta) + y') = 0$. L'interprétation est que E , l'énergie (cinétique plus potentielle) reste constante.

(b) Le dessin est la figure 6.16 du livre (version française). Il y a essentiellement deux types de courbes : les courbes fermées, plus ou moins circulaires, correspondent à un mouvement de pendule d'une horloge. Les courbes infinies, ondulantes, correspondent à une situation où le pendule tourne tellement vite qu'il fait le tour complet, une infinité de fois.

Comportement qualitatif des solutions

Exercice 4 On considère l'équation différentielle $x' = \sin(x)$.

(a) Trouver toutes les solutions constantes (solutions de la forme $x(t) = x_0$) de cette équation. Sont-elles stables ?

(b) Résoudre l'équation. Indication : pour calculer une primitive de $\frac{1}{\sin(x)}$, utiliser un changement de variables de type "moitié d'angle".

Solution : pour une telle solution on doit avoir $x'(t) = 0$ pour tout t , et donc $\sin(x_0) = 0$. On trouve donc les solutions constantes $x(t) = k \cdot \pi$, pour $k \in \mathbb{Z}$. Nous affirmons que pour k pair, ces solutions sont instables, et pour k impair, elles sont stables. Regardons par exemple la solution $x(t) = 0$. Soit ϵ un nombre dans l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$. Alors le tube

$$\{(t, x) \mid x \in [-\epsilon, \epsilon]\}$$

est un anti-entonnoir, car aux points $(t, -\epsilon)$, le champ des directions pointe vers le bas ($x' < 0$), et aux points (t, ϵ) , le champ des directions pointe vers le haut ($x' > 0$). C'est pareil pour tous les ϵ -voisinages des droites horizontales $x = k \cdot \pi$ avec k pair, et c'est le contraire (on a un entonnoir) pour k impair.

(b) On a $t+C = \int \frac{1}{\sin(x)} dx = \ln(\tan(\frac{x}{2}))$. On en déduit $x = 2 \cdot (\arctan(\exp(t+C)) + k\pi)$, où $C \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$ sont des constantes.

Exercice 5 On considère l'équation différentielle $x' = x^2 - t$. Si $u(t)$ est une solution avec $u(t_0) = x_0$, où $t_0 > \frac{5}{4}$ et $x_0 < -\sqrt{t_0 - 1}$, montrer que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) + \sqrt{t} = 0$$

Exercice 6 On considère l'équation $x' = \sin(tx)$. Dessiner les isoclines associées aux pentes 0, 1 et -1 . Dans le secteur triangulaire

$$\{(t, x) \mid 0 \leq x \leq t\}$$

du plan, dessiner les entonnoirs et anti-entonnoirs.

Solution : voir la figure 1.27 du livre. Dans le secteur triangulaire, les isoclines de pente 0 (c.à.d. les courbes $x(t) = \frac{n\pi}{t}$) sont des barrières inférieures, et les isoclines de pente -1 (c.à.d. les courbes $x(t) = \frac{(3+4n)\pi}{2\cdot t}$) sont des barrières supérieures. Dans la figure, vous voyez les anti-entonnoirs, et les tubes entre les courbes $x = \frac{(1+2n)\pi}{t}$ et $\frac{(3+4n)\pi}{2\cdot t}$ sont des entonnoirs.

Exercice 7 (a) Calculer les solutions des équations différentielles $x' = x^2$ et $x' = t^2$ (il s'agit d'un rappel, on l'a déjà fait).

(b) Démontrer que la solution $u(t)$ de l'équation

$$x' = x^2 + t^2 \text{ satisfaisant } u(0) = 0$$

tend vers $+\infty$ en temps fini. Plus exactement : montrer qu'il existe un $c \in \mathbb{R}$ tel que la solution est bien-définie sur l'intervalle $[0, c[$ et telle que $\lim_{t \rightarrow c^-} u(t) = +\infty$. En revanche, n'essayez pas de calculer la valeur exacte de c !

Solution : (a) $x' = x^2$ a des solutions $x(t) = \frac{-1}{t+C}$. L'équation $x' = t^2$ a des solutions $x(t) = \frac{t^3}{3} + C$. (b) Dans l'équation $x' = x^2 + t^2$ on a partout $x' > x^2$ et $x' > t^2$. En particulier, les solutions $x_1(t) = \frac{x^3}{3} - 8$ de la première et $x_2(t) = \frac{-1}{x-4}$ sont des barrières inférieures. Maintenant c'est à vous d'en déduire que la solution $u(t)$ tend vers $+\infty$ quelque part entre $t = 0$ et $t = 4$. (Dessinez les deux fonctions x_1 et x_2 , observez qu'ils s'intersectent au point $(3, 1)$, et tout deviendra clair...)

Exercice 8 Dans cet exercice (assez difficile) on va continuer l'étude de notre équation préférée

$$x' = x^2 - t$$

et on va regarder des solutions $u(t)$ satisfaisant

$$u(t_0) = x_0 \text{ où } x_0 > \sqrt{1+t_0}$$

(a) Dessiner une esquisse de la région du plan

$$\{(t, x) \mid x^2 - t > x^{\frac{3}{2}}\}$$

Par un argument de barrière inférieure, démontrer que la solution u doit rencontrer cette région.

(b) Par un autre argument de barrière inférieure, démontrer que la solution u doit s'échapper vers $+\infty$ en temps fini.

Existence et unicité des solutions

Exercice 9 Les fonctions suivantes, sont-elles Lipschitziennes ?

- (a) $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ (b) $f: [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$
 (c) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{|x|}$ (d) $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(0) = 0, f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ ($x \neq 0$)
 (e) $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(0) = 0, f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x^2})$ ($x \neq 0$)

Solution : (a) Non. Par exemple $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(2x) - f(x)|}{|2x - x|} = \lim_{x \rightarrow 0} |\frac{1}{2x} - \frac{1}{x}| \cdot \frac{1}{x} = +\infty$ (b) Oui, constante de Lipschitz 1. (c) Non, par exemple $\frac{|f(x) - f(-x)|}{|x - (-x)|} = \frac{2}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} +\infty$, (c) Oui, la dérivée $f'(x) = 2x \cdot \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$ (pour $x \neq 0$ et $f'(0) = 0$) est bornée sur l'intervalle de définition. (e) Non. On peut commencer avec une **observation générale : si sur un intervalle $]a, b[$ une fonction f a une dérivée f' qui est continue et prend des valeurs arbitrairement grandes, alors f n'est pas Lipschitzienne sur $]a, b[$** . (Exercice : démontrer ce résultat). Cette observation s'applique immédiatement à la fonction $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x^2})$

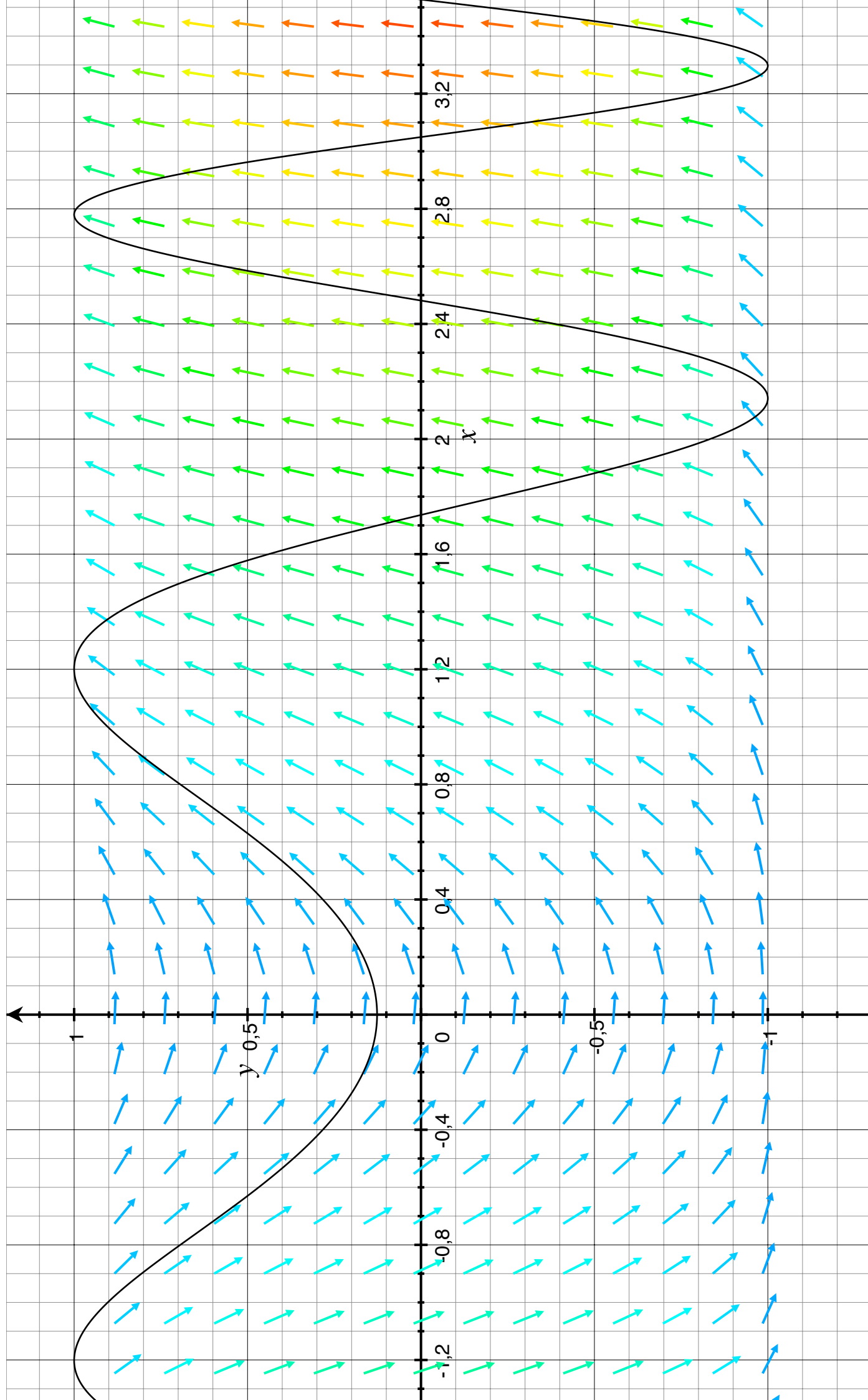
Exercice 10 Pour chacune des équations suivantes, déterminez le lieu où s'applique le théorème de Cauchy-Lipschitz (c.à.d. le théorème sur l'existence et l'unicité des solutions d'une équation différentielle). Ensuite, intégrez les équations et discutez des solutions maximales.

- (a) $\frac{dx}{dt} = 2t\sqrt{1-x^2}$ (b) $\frac{dx}{dt} = \exp(x+t)$ (c) $\sqrt{1-t^2} \frac{dx}{dt} = \sqrt{1-x^2}$

Solution (a) L'équation est définie sur le tube $\mathbb{R} \times [-1, 1]$, mais la fonction $f(t, x) = 2t\sqrt{1-x^2}$ n'est pas Lipschitzienne par rapport à x dans tout ce domaine. En revanche, elle est Lipschitzienne sur toute "boite plus mince", c.à.d. sur tout domaine de la forme $[a, b] \times [c, d]$, avec $a < b$ et $-1 < c < d < 1$. Il y a trois types de solution : (1) la solution constante $x(t) = -1$, (2) la solution constante $x(t) = 1$, et (3) les solution $x(t) = \sin(t^2 + C)$, où $C \in \mathbb{R}$ est une constante, et où la fonction $x(t)$ n'est définie sur un intervalle où $t^2 + C \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Enfin, les différentes solutions de ces trois types peuvent être recollées de divers façon. Voir le graphique.

Exercice 11 On a déjà discuté l'équation différentielle qui décrit le niveau d'eau dans un seau avec un trou au fond. Considérons maintenant un entonnoir (l'ustensil de cuisine, pas l'objet mathématique) conique d'angle au sommet 60° , de hauteur 10cm, et avec une ouverture de 0.5 cm^2 . Trouver l'équation différentielle qui décrit le niveau d'eau dans un tel entonnoir. Quel temps met-il à se vider lorsqu'il est plein ?

Si l'eau est de hauteur h dans l'entonnoir, alors l'aire de la surface de l'eau est $A(t) = \pi \cdot (\frac{h}{\sqrt{3}})^2$. L'aire du trou est $a = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$, et on a sur terre $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. On a déjà vu en



cours que

$$h' = -\sqrt{2g} \cdot \frac{a}{A} \cdot \sqrt{h} = \frac{-3a\sqrt{2g}}{\pi} h^{-3/2}$$

On trouve les solutions $h(t) = \left(-\frac{15a\sqrt{g}}{\pi\sqrt{2}}t + C\right)^{\frac{2}{5}}$. Puisque $h(0) = 0,1$, on a $C = (0,1)^{\frac{5}{2}} = 0,00316$. Maintenant on peut chercher t_{vide} tel que $A(t_{vide}) = a$, c.à.d. tel que $h(t_{vide}) = \sqrt{3a\pi}$. Après un peu de calcul on trouve $t_{vide} \simeq 6$ secondes.

Exercice 12 (a) Résoudre l'équation $x' = \sqrt{|x|} + k$, avec $k \neq 0$. A-t-on unicité des solutions satisfaisant une condition initiale donnée ?

(b) Montrer que $f(t, x) = \sqrt{|x|} + k$ ne satisfait aucune condition de Lipschitz dans le rectangle $[a, b] \times [-1, 1]$ (où a et b sont des nombres réels avec $a < b$).

(c) Qu'est-ce que ces deux résultats nous apprennent ?

Solution (c) Parfois on a unicité bien qu'aucune condition de Lipschitz soit vérifiée. Donc la condition de Lipschitz est suffisante mais non-nécessaire pour l'unicité de la solution.

Exercice 13 Trouver une constante de Lipschitz pour les équations ci-dessous dans les régions considérées.

(a) $x' = t^2 e^{-x}$ pour $(t, x) \in [-2, 3] \times [-5, 4]$

(b) $x' = (2 + \cos(t))x + 5\sqrt{|x|} + \frac{11}{2}$ sur la région $0 \leq t \leq \pi, 1 \leq x \leq 2$

(c) $x' = e^t \sin(t) \cos(x)$ sur la région $0 \leq t \leq \pi, -2 \leq x \leq 2$.

Solution : (a) $|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)| \leq 3^2 \cdot e^4$, (b) $|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)| \leq 3 + \frac{5}{2} = \frac{11}{2}$, (c) $|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)| \leq e^\pi$.

Exercice 14 Supposons que l'étude d'un problème physique nous ait conduit à l'équation $x' = f(t, x)$, mais qu pour ce faire nous ayons négligé quelques petites forces et que nous pensions que l'équation régissant le problème réel soit plutôt $x' = f(t, x) + g(t, x)$ avec $|g(t, x)| < 0.1$.

Supposons que $f(t, x)$ admette 2 comme constante de Lipschitz et que $u(t)$ soit une solution de $x' = f(t, x)$ vérifiant $u(0) = 0$ et $u(5) = 17$. Si le système réel démarre en $t = 0$ avec la condition initiale $x_0 = 0 \pm 0.03$, que pouvons-nous dire de sa valeur en $t = 5$?