Université de Rennes 1 | Année 2008–2009
UFR Mathématiques
Module S4, ED1

Feuille d'exercices 5

Exercice 1 Utiliser la méthode des coefficients indéterminés pour trouver toutes les solutions des équations suivantes (voir le cours pour savoir comment il faut "déviner" la forme générale des solutions).

$$(a) \quad x' = x + t^2 \qquad\qquad (b) \quad x' = x + 2e^t$$

Solutions : (a) on dévine qu'une solution particulière est de la forme $u_p(t) = at^2 + bt + c$. L'équation est alors équivalente à $2at+b = at^2+bt+c+t^2$. Par comparaison des coefficients on trouve, après avoir résolu un système linéaire, qu'avec $a = -1$, $b = -2$, $c = -2$ on obtient effectivement une solution. Donc la solution générale est $u(t) = C \cdot \exp(t) - t^2 - 2t - 2$. (b) on dévine qu'une solution particulière est de la forme $u_p(t) = a\exp(t) + b \cdot t \cdot \exp(t)$. L'équation est alors équivalente à $(a + b)\exp(t) + bt\exp(t) = (a + 2)\exp(t) + bt\exp(t)$. Par comparaison des coefficients on trouve, après avoir résolu un système linéaire, qu'avec $b = 2$, et $a \in \mathbb{R}$ arbitraire, on obtient effectivement une solution. Donc la solution générale est $u(t) = C \cdot \exp(t) + 2t\exp(t)$.

Exercice 2 Résoudre les équations linéaires suivantes.

$$\begin{array}{llll} (a) & x' - \frac{2x}{t+1} = (t+1)^2 & (b) & x' - \frac{\alpha x}{t} = \frac{t+1}{t} \\ (c) & (t - t^3)x' + (2t^2 - 1)x - \alpha t^3 = 0 & (d) & x' + \frac{n}{t}x = \frac{\alpha}{t^n} \\ (e) & x' + x = e^{-t} & & \end{array}$$

Si vous cherchez des exemples supplémentaires, regardez l'Exercice 2 sur la feuille 4. Reconnaître parmi ces équations celles qui sont linéaires, et les intégrer en tant que telles. Comparer les résultats.

Solutions : (a) On re-écrit l'équation : $x' = \frac{2x}{t+1} + (t+1)^2$. Pour l'équation homogène associée $x' = \frac{2}{t+1}x$ on trouve par séparation des variables $\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{2}{t+1}dt$, et donc $x = \exp(2\cdot\ln(t+1))\cdot C = (t+1)^2\cdot C$. Pour résoudre l'équation $x' = \frac{2x}{t+1} + (t+1)^2$ par variation de la constante, on va y substituer $x(t) = v(t)\cdot(t+1)^2$. On a alors $x' = v'(t)(t+1)^2 + 2v(t)\cdot(t+1)$ et $\frac{2x}{t+1} + (t+1)^2 = \frac{2v(t)\cdot(t+1)^2}{t+1} + (t+1)^2 = 2v(t)\cdot(t+1) + (t+1)^2$. L'équation différentielle dit alors que $v'(t)(t+1)^2 + 2v(t)\cdot(t+1) = 2v(t)\cdot(t+1) + (t+1)^2$, et donc $v'(t) = 1$, donc $v(t) = t + a$ (où $a \in \mathbb{R}$ est une constante). On trouve enfin $x(t) = (t+a)\cdot(t+1)^2$. Remarquez que l'équation différentielle n'est pas définie en $t = -1$, et on peut avoir une solution obtenu en recollant $x(t) = (t+a)(t+1)^2$ pour $t < -1$ et $x(t) = (t+a')(t+1)^2$ pour $t > -1$, où a et a' sont deux constantes différentes !

(b) $x(t) = \frac{1}{1-\alpha}t - \frac{1}{\alpha} + C \cdot |t|^\alpha$. Attention, l'équation n'est pas définie en $t = 0$, et on peut avoir une solution avec une valeur de C sur $\mathbb{R}_-$ et avec une autre valeur de C sur $\mathbb{R}_+$. (c) $x(t) = \alpha t + Ct\sqrt{1-t^2}$, (d) $x(t) = \frac{\alpha t + C}{t^n}$. L'équation n'est pas définie en $t = 0$, et on a par exemple une solution $x(t) = \frac{\alpha t+5}{t^n}$ si $t < 0$ et $x(t) = \frac{\alpha t-1}{t^n}$ si $t > 0$. (e) $x(t) = \frac{t+C}{\exp(t)}$.

Exercice 3 Intégrer les équations de Bernoulli suivantes.

(a)	$x' + tx = t^3x^3$	(b)	$(1-t^2)x' - tx - \alpha tx^2 = 0$
(c)	$3x' - \alpha x = \frac{t+1}{x^2}$	(d)	$x' + x + (\sin(t) + e^t)\, x^3 = 0$

(a) Avec $z = x^{-2}$, notre équation est équivalente à $z' = 2tz - 2t^3$, ce qui est une équation linéaire. L'équation homogène $z' = 2tz$ a une solution $z(t) = C \cdot \exp(t^2)$. On va remplacer la constante C par une fonction $K(t)$, c.à.d., on va chercher une solution de l'équation inhomogène $z' = 2tz - 2t^3$ où $z(t)$ est une fonction de la forme $z(t) = K(t) \cdot \exp(t^2)$. On trouve

$$K'(t) \cdot \exp(t^2) + K(t) \cdot 2t \cdot \exp(t^2) = 2tK(t) \cdot \exp(t^2) - 2t^3$$

et donc $K'(t) = -2t^3 \cdot \exp(-t^2) = t^2 \cdot -2t \cdot \exp(-t^2)$. On intègre : $K(t) = (t^2+1)\exp(-t^2) + C$, où $C \in \mathbb{R}$ est une constante. On a donc la solution générale $z(t) = t^2 + 1 + C \cdot \exp(t^2)$, et enfin

$$x(t) = \frac{\pm 1}{\sqrt{t^2 + 1 + C \cdot \exp(t^2)}}$$

(b) $x(t) = \frac{1}{C \cdot \sqrt{|1-t^2|} - \alpha}$, (c) $x(t) = \sqrt[3]{-\frac{t}{\alpha} - \frac{\alpha+1}{\alpha^2} + C\exp(\alpha t)}$, (d) $x(t) = \frac{1}{\sqrt{-2\left(\frac{1}{5}\cos(t) + \frac{2}{5}\sin(t) + \exp(t)\right) + C \cdot \exp(2t)}}$

Exercice 4 Parfois un changement de variables choisi intelligemment peut aider à résoudre une équation différentielle. Une famille d'exemples est donnée par les équations de Bernoulli. Voici quelques autres exemples.

(a)	$x' = (t+x)^2$	(b)	$\frac{dx}{dt} = \frac{t+1}{t^2}x - 2\frac{x}{t}\ln(\frac{x}{t})$
(c)	$(1+t^2)\frac{dx}{dt} = 2t(1+x^2) \cdot \mathrm{Arctan}(x)$	(d)	$2te^x\frac{dx}{dt} + e^x - t^2 = 0$

Indication : les changements de variables à utiliser sont écrits en blanc (sélectionnez avec la souris et collez pour visualiser : (a) (b) (c) (d))

(a) Avec le changement de variables $z = t + x$ (donc $x = z - t$), notre équation est équivalente à $z' = z^2 + 1$. Cette équation est à variables séparables, et on trouve $\arctan(z) = t + C$. donc $z = \tan(t + C)$, donc $x = \tan(t + C) - t$. (b) Avec $z = \ln(\frac{x}{t})$, l'équation différentielle est équivalente à $v' = -\frac{2}{t} \cdot v + \frac{1}{t^2}$. C'est une équation linéaire, avec solution $v(t) = \frac{1}{t} + \frac{C}{t^2}$. Donc $x(t) = \exp(\frac{1}{t} + \frac{C}{t^2}) \cdot t$. (c) $x(t) = \tan(C \cdot (1+t^2))$ pour t tel que $C \cdot (1+t^2) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. (d) Avec $z(t) = t \cdot e^x$, on a $x(t) = \ln(\frac{z}{t})$, et $x' = \frac{z't - z}{zt}$. L'équation s'écrit donc $2z\frac{z't-z}{zt} + \frac{z}{t} - t^2 = 0$, ce qui se simplifie : $z' - \frac{z}{2t} = \frac{1}{2}t^2$. C'est une équation linéaire, et après un peu de travail on trouve la solution générale $z(t) = C \cdot \sqrt{t} + \frac{1}{5}t^3$. Donc,

$x(t) = \ln(\frac{z(t)}{t}) = \ln\left(\frac{C}{\sqrt{t}} + \frac{1}{5}t^2\right)$

Exercice 5 Intégrer les équations de Ricatti suivantes.

$$(a) \quad (1-t^3)\tfrac{dx}{dt} + 2tx^2 - t^2x - 1 = 0 \qquad (b) \quad \tfrac{dx}{dt} = (t^2+1)x^2 - x - t^2$$

Solution : (a) Avec un peu d'expérimentation on trouve la solution particulière $x_p(t) = t$. On pose alors $x(t) = t + z(t)$. Remplacer cette formule dans l'équation différentielle donne l'équation $z' = \frac{3t^2}{t^3-1}z(t) + \frac{2t}{t^3-1}z^2$. Ceci est une équation de Bernoulli, avec solution $z(t) = \frac{t^3-1}{-t^2+C}$. La solution est donc $x(t) = t + \frac{t^3-1}{-t^2+C}$.
(b) On trouve la solution particulière $x_p(t) = 1$. Avec le changement $u = 1/z$, avec $z = 1+x$, on trouve $u' = -(2t^2+1)u-(t^2+1)$. La solution est de la forme $u(t) = \exp(-\frac{2}{3}t^3-t)\cdot K(t)$. Trouver $K(t)$ devient très dur.... Désolé !