Université de Rennes 1 Année 2008–2009
UFR Mathématiques
Module S4, ED1

Feuille d'exercices 4

Exercice 1 De l'eau entre dans une citerne conique avec un débit de k_1 unités de volume par unité de temps. Elle s'évapore avec une débit proportionnel à l'aire de contact entre l'eau et l'air, c'est-à-dire $V^{\frac{2}{3}}$, où V est le volume d'eau dans la citerne. Écrire l'équation différentielle vérifiée par V. Sans la résoudre, dessiner quelques solutions. Y a-t-il un équilibre ? Est-il stable ?

Exercice 2 Résoudre comme équations à variables séparables les équations suivantes.

$(a)\quad x' = tx$	$(b)\quad x' = kx^\alpha$	$(c)\quad x' = ax + b$
$(d)\quad (1+x)tx' + (1-t)x = 0$	$(e)\quad (1+x) - (1-t)x' = 0$	$(f)\quad (t^2 - xt^2)x' + x^2 + tx^2 = 0$
$(g)\quad (x-\alpha) + t^2x' = 0$	$(h)\quad x - (t^2-\alpha^2)x' = 0$	$(i)\quad \frac{dx}{dt} = \frac{1+x^2}{1+t^2}$

Remarqez que la question (b) concerne en particulier le seau percé. Si vous cherchez des exemples supplémentaires, regardez l'exercice 4 sur la feuille 2. Avec une seule exception, les équations de cet exercice sont à variables séparables, et vous pouvez les résoudre.

Solutions : (a) $\frac{dx}{x} = t \cdot dt$, intégration donne $x = K \cdot \exp(t^2/2)$, avec $K \in \mathbb{R}$.
(b) Supposons $\alpha \neq 1$, et $x \geqslant 0$ (pour que x^α soit défini). On trouve $x = (k(1-\alpha)t + C)^{1/(1-\alpha)}$. Pour $\alpha = 1$ on a $x = c \cdot \exp(kt)$
(c) $\frac{1}{x+\frac{b}{a}}dx = a\ dt$ et en intégrant on trouve $x(t) = K\exp(at) - \frac{b}{a}$
(d) $\frac{x+1}{x}dx = \frac{t-1}{t}dt$, en intégrant on trouve $x + \ln(|x|) = t - \ln(|t|) + C$, et je ne sais pas écrire x explicitement en fonction de t.
(e) $\frac{dx}{1+x} = \frac{dt}{1-t}$, et en intégrant on trouve $x = \frac{K}{|1-t|} - 1$, avec $K \in \mathbb{R}$.
(f) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\ dx = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\ dt$ et donc $\ln(|x|) + \frac{1}{x} = \ln(|t|) - \frac{1}{t}$
(g) $\frac{dx}{\alpha - x} = \frac{dt}{t^2}$, donc $x = \alpha + K\exp(\frac{1}{t})$
(h) $\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t^2-\alpha^2}$, donc $\ln|x| = -\frac{1}{\alpha}\mathrm{argtanh}(\frac{t}{\alpha}) + C$ et enfin $x = K\exp(-\frac{1}{\alpha}\mathrm{argtanh}(\frac{t}{\alpha})) = (C \cdot \frac{t-\alpha}{t+\alpha})^{\frac{1}{2\alpha}}$ (car pour $x \in]-1,1[$, $\mathrm{argtanh}(x) = -\ln(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}})$)
(i) $\mathrm{Arctan}(x) = \mathrm{Arctan}(t) + C$, donc $x = \tan(\mathrm{Arctan}(t) + C) = \frac{t+\tan(C)}{1-t\cdot\tan(C)} = \frac{t+K}{1-t\cdot K}$

Exercice 3 Montrer que les équations suivantes sont homogènes, et les résoudre.

$(a)\quad x' = 1 + \frac{x}{t} + \left(\frac{x}{t}\right)^2$	$(b)\quad (x-t)\ dt + (x+t)\ dx = 0$
$(c)\quad t\ dx - x\ dt = \sqrt{t^2+x^2}\ dt$	$(d)\quad (2\sqrt{xt} - x)dt + t\ dx = 0$

Solutions : (a) avec $v = \frac{x}{t}$ et $g(v) = 1+v+v^2$, on utilise séparation des variables. On obtient $\ln(t)+C = \int \frac{1}{1+v+v^2-v} = \mathrm{Arctan}(v)$, et donc $v = \tan(\ln(|t|)+C)$, donc $x = t\cdot\tan(\ln(t)+C)$.

(Question supplémentaire : si je veux que $x(t_0) = x_0$, comment dois-je choisir C ?)
(b) $\frac{dx}{dt} = \frac{1-\frac{x}{t}}{1+\frac{x}{t}}$, et on trouve $\ln(|t|) = \int \frac{1}{\frac{1-v-(1+v)v}{1+v}} dv = -\frac{1}{2}\ln(|1-2v-v^2|) + C$, donc $t = \frac{K}{\sqrt{1-2\frac{x}{t}-(\frac{x}{t})^2}}$.
(c) $\ln|t| + C = \int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}$ =argsh(v), donc $v = \sinh(\ln|t| + C)$, donc $x = t \cdot \sinh(\ln|t| + C)$
(d) $\ln(|t|)+C = \int \frac{1}{-2\sqrt{v}} dv = -\sqrt{v}$. Solution $x = t\cdot(C-\ln|t|)^2$ si $t \in]-\infty, -\exp(C)[\cup]0, \exp(C)[$.