Université de Rennes 1 — Année 2008–2009
UFR Mathématiques
Module S4, ED1

Feuille d'exercices 1

Exercice 1 Donner un exemple d'une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est dérivable partout, satisfaisant $f'(0) > 0$, mais qui n'est pas croissante dans un voisinage de 0.

Exercice 2 Soit $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On peut se représenter son graphe comme un relief. Les *courbes de niveau* de ce relief sont définies implicitement par

$$F(t,x) = C$$

Supposons que $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto x(t)$ est une fonction dérivable dont le graphe est inclus dans une courbe de niveau. Montrer que cette fonction satisfait l'équation différentielle

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x)\ x' \ + \ \frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = 0$$

Exercice 3 Parmi les espaces suivants, lesquels sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Donnez ensuite leur dimension (attention, certains sont de dimension infinie !)

(*a*) $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ = l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$
(*b*) $\mathcal{C}^k$ = fonctions de classe $\mathcal{C}^k$
(*c*) $\{f(x)x^2 + g(x)(x+1) \mid f,g \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})\}$
(*d*) $\{e^x + a\sin(x) \mid a \in \mathbb{R}\}$
(*e*) $\mathcal{F}(I,\mathbb{R}_{\geqslant 0})$: fonctions a valeurs positives
(*f*) $\{A\cos(\omega x + \phi) \mid A,\omega,\phi \in \mathbb{R}\}$
(*g*) $\{f \in \mathcal{C}^1 \mid (f')^2 - f^2 - 25 = 0\}$
(*h*) $\{f \in \mathcal{C}^k \mid f^{(k)} = f\}$

Exercice 4 Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?
(a) $D\colon \mathcal{C}^1 \to \mathcal{C}^0$, $f \mapsto f' - f$
(b) Pour $g \in \mathcal{F}$, soit $M_g\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, $f \mapsto gf$, où gf note le produit (pas la composition)
(c) $P\colon \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, $(f,g) \mapsto fg$

Exercice 5 Calculez les primitives suivantes (n'oubliez pas de préciser sur quelle intervalle vous cherchez la primitive, ainsi que la constante d'intégration

(*a*) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$
(*b*) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(x^2+x+1)}\,dx$
(*c*) $\displaystyle\int x^2\sin(x)\,dx$
(*d*) $\displaystyle\int \frac{1}{2+\cos(x)}\,dx$
(*e*) $\displaystyle\int \frac{1}{2+\cosh(x)}\,dx$
(*f*) $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$
(*g*) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+9}\,dx$

Indications : en (a) et (b), décomposition en éléments simples. Dans la question (b), on pourra en plus faire un changement de variables pour obtenir une intégrale de la forme $\int \frac{1}{1+t^2}\, dt = \mathrm{Arctan}(t)$. Dans (d), penser au changement de variables du type "moitié angle" $x = \tan(t/2)$. La question (e) peut par exemple être résolu avec un changement de variables $t = e^x$, dans (f) on peut changer de variable $x = \sin(t)$, et dans (g) penser à l'Argsh.

Exercice 6 (a) À l'aide du théorème des accroissements finis, montrez que $\ln x \leq x - 1$ si $x > 1$.

(b) À l'aide du théorème des accroissements finis, montrez que $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 Pour chacune des fonctions suivantes, donnez une équation pour la tangente au graphe au point indiqué et trouvez la position du graphe par rapport à cette tangente.

$$(i)\ \sin^2 x - \frac{x^2}{1+x^2} \ \textit{en}\ x = 0, \quad (ii)\ \sin x + \mathrm{Arcsin}(x) + 2 \ \textit{en}\ x = 0, \quad (iii)\ \sqrt{3x} - \sqrt{2+x} \ \textit{en}\ x = 1.$$

Exercice 8 Classez les fonctions suivantes suivant leurs ordres de grandeur en 0 :

$$1\ ,\ x^2 \sin^2 x\ ,\ x^3\ ,\ \frac{1}{x^2}\ ,\ e^{-1/x^2}\ ,\ \frac{1}{x}.$$

Classez les fonctions suivantes suivant leurs ordres de grandeur en 1 :

$$1\ ,\ (x-1)^2 \sin^2 x\ ,\ x^{200} - 1\ ,\ \cos^3(\frac{\pi}{2}x)\ ,\ \frac{1}{\sin 2\pi x}.$$

Exercice 9 Étudiez les variations et tracez le graphe de la fonction $\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$. Étudiez en particulier le comportement quand x tend vers $\pm\infty$.

Exercice 10 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction concave.

Démontrez par récurrence sur p l'inégalité suivante

$$f(\sum_{i=1}^{p} t_i a_i) \geq \sum_{i=1}^{p} t_i f(a_i)$$

où les $a_i, 1 \leq i \leq p$, appartiennent à $[a, b]$ et les $t_i, 1 \leq i \leq p$, sont des nombres positifs tels que $\sum_{i=1}^{p} t_i = 1$.

La moyenne arithmétique des a_i, pour $1 \leq i \leq p$, est $m_a = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} a_i$. Leur moyenne géométrique est $m_g = (\Pi_{i=1}^{p} a_i)^{1/p}$. Quelle est la plus grande moyenne des deux ?