Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
Module ED1

Année 2008–2009

Contrôle continu (devoir à la maison) 2

$\boxed{\textbf{Exercice 1}}$ On considère l'équation différentielle

$$x' = \frac{x}{t+x}$$

(a) Démontrer qu'il s'agit d'une équation homogène, et la résoudre.

(b) Dessiner les isoclines de pente -2, -1, 0, 1 et 2, ainsi que l'ensemble des points où l'équation n'est pas définie. Indiquer aussi le comportement des solutions.

Solution rapide (a) L'équation est équivalente à

$$x' = \frac{1}{\frac{1}{x/t} + 1}$$

elle est donc de la forme $x' = g(\frac{x}{t})$, c.à.d. elle est homogène.

Avec le changement de variable $u = \frac{x}{t}$, l'équation s'écrit

$$u' = \frac{-u^2}{t(1+u)}$$

Par séparation des variables on trouve assez facilement $-\frac{1}{u} + \ln(|u|) = -\ln(|t|) + C$, et donc $u \cdot \exp(-\frac{1}{u}) = \frac{K}{t}$, où $C, K \in \mathbb{R}$ sont des constantes. En resubstituant $u = x/t$, on obtient

$$x \cdot \exp\left(\frac{-t}{x}\right) = K$$

Je ne sais pas écrire explicitement x en fonction de t, mais pour pouvoir dessiner la solution, il est tout aussi utile d'écrire t en fonction de x, ce qui est facile : $-\ln(\frac{K}{x}) \cdot x = t$.

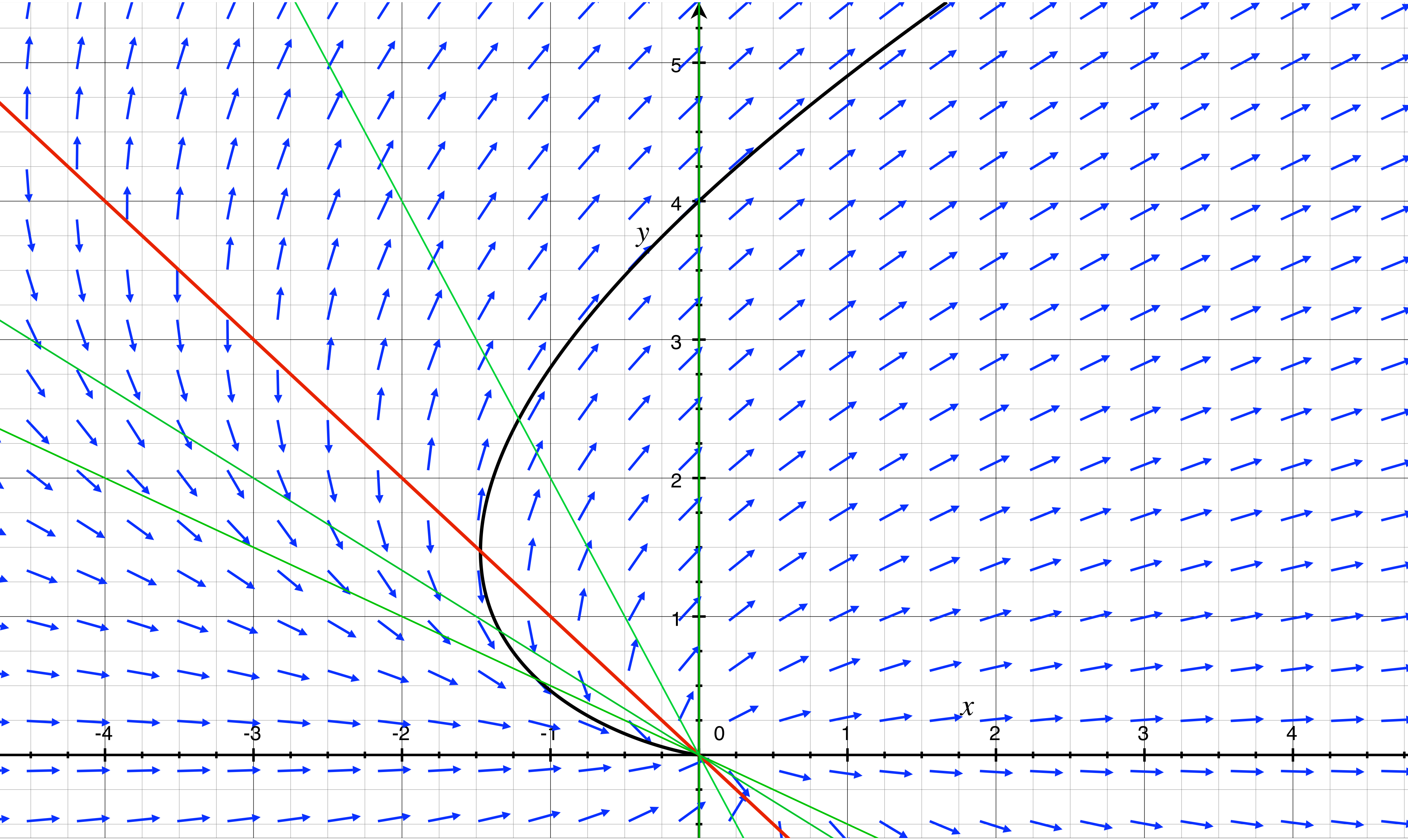
(b) Les isoclines sont $x(t) = -2t$ (pente 2), $t = 0$ (pente 1), $x(t) = 0$ (pente 0), $x(t) = \frac{-t}{2}$ (pente -1), et $x(t) = \frac{-2}{3}t$ (pente -2). Voir l'image.

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ On considère l'équation différentielle

$$2tx' + x = t^7$$

(a) Trouver toutes les solutions maximales de cette équation. (Indication : remarquer que x' n'est pas bien définie en $t = 0$.)

(b) Calculer l'ensemble des points d'inflexion des solutions.



y
x
5
4
3
2
1
0
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4

Solution rapide (a) Cette équation est équivalente à $x' + \frac{x}{2t} = \frac{t^6}{2}$, et donc linéaire (inhomogène). L'équation homogène associée $x' + \frac{x}{2t} = 0$ a les solutions $x(t) = K \cdot t^{-1/2}$.

Cherchons donc des solutions de la forme $x(t) = K(t) \cdot t^{-1/2}$. On trouve $K'(t) \cdot t^{-1/2} = \frac{t^6}{2}$, et en intégrant $K(t) = \frac{1}{15}t^{15/2} + C$, et enfin

$$x(t) = \frac{1}{15}t^7 + \frac{C}{\sqrt{|t|}}$$

(b) Pour trouver l'ensemble des points d'inflexion, on utilise la formule

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial t} &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ \frac{-1}{2t} \cdot \left(-\frac{x}{2t} + \frac{t^6}{2} \right) + \frac{2}{2t^2} + 3t^5 &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ x &= -\frac{11}{3}t^7 \end{aligned}$$

L'ensemble des points d'inflexion des solutions est le graphe de la courbe $x(t) = -\frac{11}{3}t^7$.

Quelques solutions (en noir), ainsi que le graphe de $-\frac{11}{3}t^7$ (en rouge) sont sur le graphique.

Exercice 3 On considère l'équation différentielle de type Bernoulli

$$(1 + t^2)x' = 4tx + 4t\sqrt{x}$$

Trouver toutes les solutions de cette équation. (Indication : faites très attention au domaine de définition de chaque solution – il y a un piège.)

Solution rapide Nous observons tout d'abord que l'équation n'est définie que pour $x \geqslant 0$. Avec le changement de variable $z = \sqrt{x}$ on trouve l'équation

$$z' = \frac{2t}{1+t^2}z + \frac{2t}{1+t^2}$$

ce qui est linéaire (inhomogène). Mais attention, le changement de variable n'est valable que si $z \geqslant 0$, aussi !

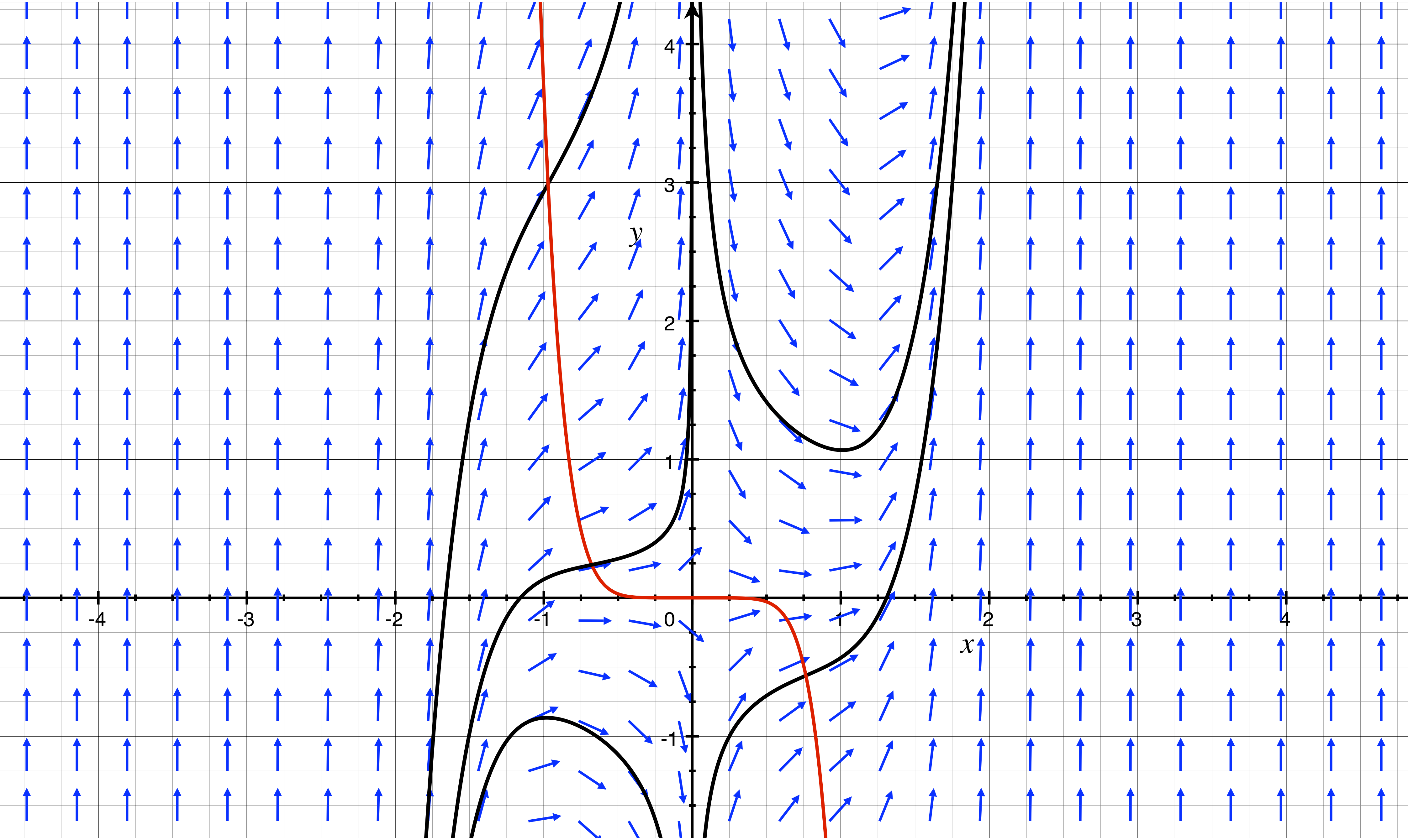
On résoud d'abord la partie homogène, $z' = \frac{2t}{1+t^2}z$. C'est facile, en utilisant séparation des variables, et on trouve $z(t) = K \cdot (1 + t^2)$.

On pose donc comme solution de $z' = \frac{2t}{1+t^2}z + \frac{2t}{1+t^2}$:

$$z(t) = K(t) \cdot (1 + t^2)$$

On calcule alors

$$K'(t) \cdot (1 + t^2) + K(t) \cdot 2t \quad = \quad z' = \frac{2t}{1+t^2} \cdot K(t) \cdot (1 + t^2) + \frac{2t}{1+t^2}$$



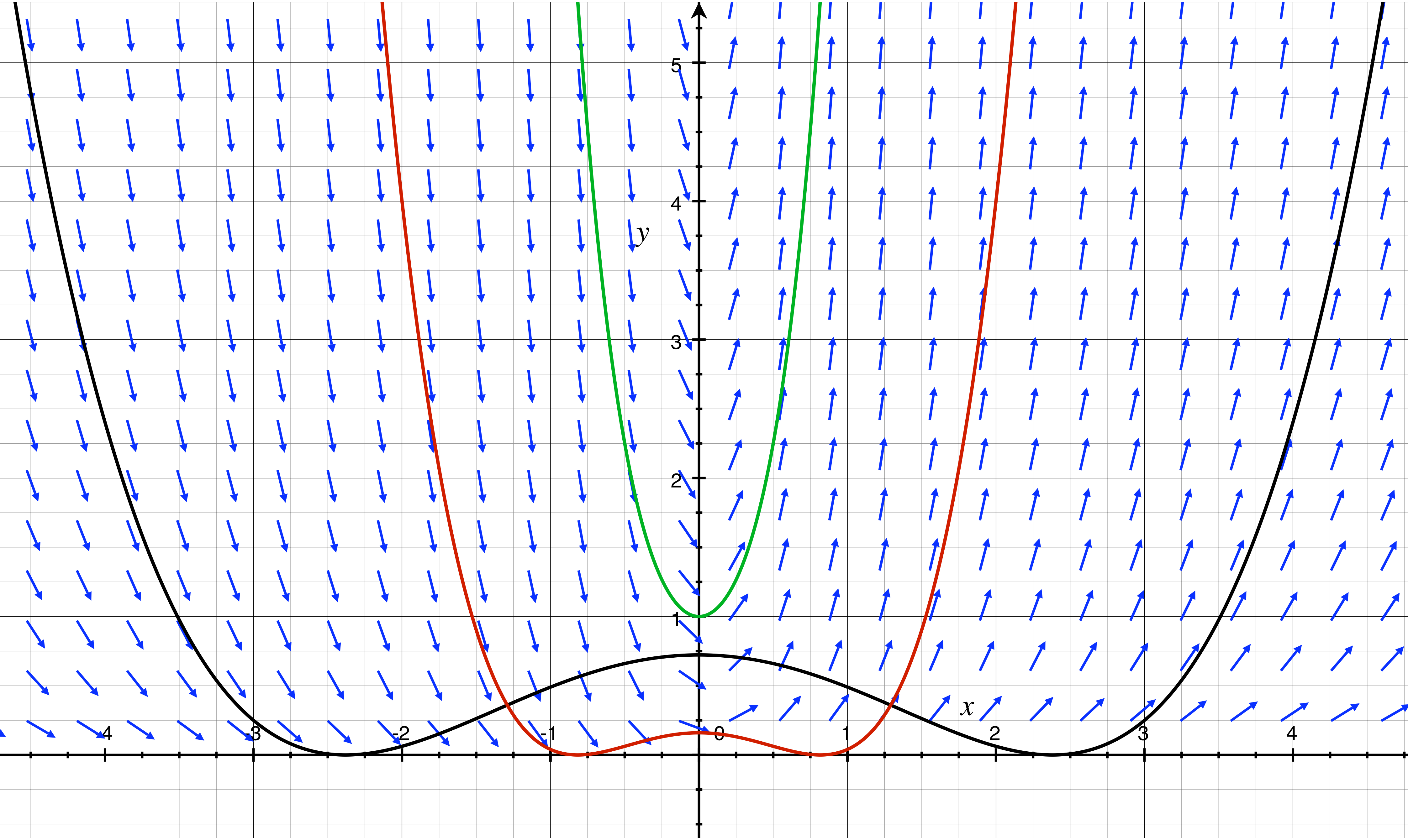
y
x
4
3
2
1
0
-1
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4

$$
\begin{aligned}
K'(t)\cdot(1+t^2) &= \frac{2t}{1+t^2}\\
K'(t) &= \frac{2t}{(1+t^2)^2}\\
K(t) &= \frac{-1}{1+t^2}+C\\
\underline{z(t)} &= \left(\frac{-1}{1+t^2}+C\right)\cdot(1+t^2) = \underline{-1+C\cdot(1+t^2)}\\
\underline{x(t)} &= \underline{\left(-1+C\cdot(1+t^2)\right)^2}
\end{aligned}
$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante. On distingue alors trois cas :

- Si $C < 0$, alors $z(t) < 0$ pour tout t. Ce cas ne contribue donc aucune solution de l'équation différentielle originale.
- Si $0 < C < 1$, alors $z(t)$ est positif ssi $t^2 > \frac{1}{C} - 1$. On a donc les solutions $x(t) = -1 + C \cdot (1+t^2)$, définies sur l'intervalle $]-\infty, -\sqrt{\frac{1}{C}-1}[\cup]\sqrt{\frac{1}{C}-1}, +\infty[$
- Si $C > 1$, alors la solution $-1 + C \cdot (1+t^2)$ est valable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Dans l'image en bas, il y a les solution pour $C = 0,15$ (noir), $C = 0,6$ (rouge), et $C = 2$ (vert).


y
x
5
4
3
2
1
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4