LICENCE
D01 : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Examen Terminal

Lundi 15 Mai 2006
Durée : 2 heures

Exercice 1
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0\,,\,0)$ par :

$$f(x\,,\,y) = Ln(x^2 + y^2)$$

Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial\, x^2}\,(x\,,\,y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial\, y^2}\,(x\,,\,y)$.

Exercice 2
Calculer le volume de la "calotte" sphérique définie par :

$$x^2 + y^2 + z^2 \;\leqslant\; R^2 \quad \text{et} \quad z \geqslant \frac{R}{2}$$

(On pourra utiliser les coordonnées cylindriques $(r\,,\,\theta\,,\,z)$ avec $x = r\,\cos\theta\,,\ y = r\,\sin\theta\,,\ z = z$.)

Exercice 3
Soit S la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

1. Quelle est l'équation du plan tangent à S en $(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0) \in S$?
2. Pour quelles valeurs de z_0 ce plan tangent est-il parallèle à Oz ?
3. En quels points $(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)$ ce plan tangent est-il parallèle à Oz et passe-t-il par $(0\,,\,4\,,\,0)$?

Exercice 4
Soit S la surface $x^2 + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 1$.
Chercher les minimum et maximum de la fonction $f(x\,,\,y\,,\,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sur cette surface S.

Exercice 5
Soit D le domaine compris entre les paraboles $2y = x^2$ et $y = -\,x^2 + 3$.

1. Dessiner le domaine D.
2. Calculer son aire.