Université de Rennes 1 Année 2007–2008
UFR Mathématiques
Module S4C02

Feuille d'exercices 9

Exercice 1 Déterminer une base de l'espace des solutions de $x''' - x = 0$.

Solution $\exp(t), \exp(-\frac{t}{2})\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t), \exp(-\frac{t}{2})\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)$.

Exercice 2 (a) Trouver une base de l'espace des solutions de $x^{(4)} + 8x'' + 16 = 0$. Indication : $\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = (\lambda^2 + 4)^2$.

(b) Trouver une solution $u(t)$ de cette équation qui vérifie $u(0) = 1$, $u'(0) = 1$, $u''(0) = 0$, $u'''(0) = 4$. (Rq : la partie (b) nécessite des calculs un peu lourds.)

Solution (a) Le polynôme $\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16$ a deux racines doubles, une à $2i$, l'autre à $-2i$. On a donc comme base $\{\cos(2t), \sin(2t), t \cdot \cos(2t), t \cdot \sin(2t)\}$.

(b) si $u(t) = c_1 \cos(2t) + \ldots + c_4 t \sin(2t)$, on calcule u', u'' et u''', et en comparant des coefficients on trouve $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = -1$, $c_4 = 1$.

Exercice 3 Considérons l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\mu\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

où ω_0 et μ sont des constantes réelles positives. Déterminer l'ensemble des solutions. (Indication : il faudra distinguer trois cas : $\mu < \omega_0$, $\mu = \omega_0$, et $\mu > \omega_0$.) Donner une interprétation physique de vos résultats.

Solution Si $\mu < \omega_0$ on trouve les solutions

$$c_1 \exp(-\mu t)\cos(\omega t) + c_2 \exp(-\mu t)\sin(\omega t), \quad \text{où} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$$

Si $\mu = \omega_0$, c'est $c_1 \exp(-\mu t) + c_2 t \exp(-\mu t)$,
Si $\mu > \omega_0$, c'est

$$c_1 \exp(\mu_1 t) + c_2 \exp(\mu_2 t), \quad \text{où} \quad \mu_1, \mu_2 = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$$

Attention, dans le troisième cas, μ_1 et μ_2 sont tous les deux négatifs.

Exercice 4 Trouver toutes les solutions de l'équation $x''' + 2x'' + x' = t$. (Il y avait malheureusement une faute de frappe sur la feuille distribuée en cours !)

Solution Regardons d'abord l'équation homogène associée $x''' + 2x'' + x' = 0$. Le polynome $P(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda$ a une racine simple à 0 et une racine double à -1. L'équation homogène a donc une base de solutions $\{1, e^{-t}, te^{-t}\}$

Pour trouver une solution particulière de $x''' + 2x'' + x' = t = t\exp(0t)$, on remarque que 0 est une racine de multiplicité 1 de P, et t est un polynôme de degré 1, donc il doit y avoir une solution de la forme $u_p(t) = f(t)\exp(0t) = f(t)$, où $f(t)$ est un polynôme de degré $1 + 1 = 2$. En posant $u_p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ et en remplacant dans l'équation, on trouve a_0 arbitraire, $a_1 = -2$, et $a_2 = \frac{1}{2}$, c.à.d. $u_p(t) = -2t + \frac{1}{2}t^2$. Donc les solutions de l'équation originale sont

$$\frac{1}{2}t^2 - 2t + c_1 + c_2 e^{-t} + c_3 te^{-t}$$

Exercice 5 On considère l'équation d'un ressort sous l'influence d'une force extérieure

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \cos(\omega t)$$

Trouver une solution particulière de cette équation. Indication : il faudra distinguer deux cas, $\omega \neq \omega_0$ et $\omega = \omega_0$. Le premier cas a déjà été fait en cours. Le deuxième cas s'appelle le cas de la résonance – vous observerez un comportement catastrophique.

Solution On reécrit $P(\frac{d}{dt})x = \frac{1}{2}e^{i\omega t} + \frac{1}{2}e^{-i\omega t}$, où $P(\lambda) = \lambda^2 + \omega_0^2$.
Si $\omega \neq \omega_0$, alors selon le principe de superposition on a une solution particulière

$$u_p(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{P(i\omega)}e^{i\omega t} + \frac{1}{2}\frac{1}{P(-i\omega)}e^{-i\omega t} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega t)$$

Si $\omega = \omega_0$, alors $\pm i\omega$ sont des racines simples du polynôme P. L'équation $P(\frac{d}{dt})x = \frac{1}{2}e^{i\omega t}$ a donc une solution particuliére de la forme $u_1(t) = c{\cdot}t{\cdot}e^{i\omega t}$. Comme $P(\frac{d}{dt})c{\cdot}t{\cdot}e^{i\omega t} = 2i{\cdot}c{\cdot}\omega e^{i\omega t}$, on trouve $c = \frac{1}{4i\omega}$.

De façon semblable, l'équation $P(\frac{d}{dt})x = \frac{1}{2}e^{-i\omega t}$ a une solution $u_2(t) = \frac{-1}{4i\omega}t \cdot e^{-i\omega t}$, et par superposition on trouve la solution particulière

$$u_p(t) = \frac{1}{4i\omega}t \cdot e^{i\omega t} - \frac{1}{4i\omega}t \cdot e^{-i\omega t} = \frac{1}{2\omega}t \cdot \sin(\omega t)$$

Remarquez que l'amplitude du mouvement de la voiture tend vers $+\infty$ (donc le ressort va casser), et qu'il est décalé par un quart de phase par rapport à la force extérieure.