Université de Rennes 1 — Année 2007–2008
UFR Mathématiques
Module S4C02

Feuille d'exercices 7

$\boxed{\textbf{Exercice 1}}$ Pour chacunes des équations suivantes, déterminez le lieu où s'applique le théorème de Cauchy-Lipschitz (c.à.d. le théorème sur l'existence et l'unicité des solutions d'une équation différentielle). Ensuite, intégrez les équations et discutez des solutions maximales.

$$\text{(a)}\quad \frac{dx}{dt} = 2t\sqrt{1-x^2} \qquad \text{(b)}\quad \frac{dx}{dt} = \exp(x+t) \qquad \text{(c)}\quad \sqrt{1-t^2}\,\frac{dx}{dt} = \sqrt{1-x^2}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ On a déjà discuté l'équation différentielle qui décrit le niveau d'eau dans un seau avec un trou au fond. Considérons maintenant un entonnoir (l'ustensil de cuisine, pas l'objet mathématique) conique d'angle au sommet 60°, de hauteur 10cm, et avec une ouverture de 0.5 cm^2. Trouver l'équation différentielle qui décrit le niveau d'eau dans un tel entonnoir. Quel temps met-il à se vider lorsqu'il est plein ?

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ (a) Résoudre l'équation $x' = \sqrt{|x|} + k$, avec $k \neq 0$. A-t-on unicité des solutions satisfaisant une condition initiale donnée ?

(b) Montrer que $f(t,x) = \sqrt{|x|} + k$ ne satisfait aucune condition de Lipschitz dans le rectangle $[a,b] \times [-1,1]$ (où a et b sont des nombres réels avec $a < b$).

(c) Qu'est-ce que ces deux résultats nous apprennent ?

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ Trouver une constante de Lipschitz pour les équations ci-dessous dans les régions considérées.

(a) $x' = t^2e^{-x}$ sur $[-5,5] \times [-5,5]$

(b) $x' = (2+\cos(t))x + 5\sqrt{|x|} + \frac{11}{2}$ sur la région $0 \leqslant t \leqslant \pi$, $1 \leqslant x \leqslant 2$

(c) $x' = e^t \sin(t)\cos(x)$ sur la région $0 \leqslant t \leqslant \pi$, $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ Supposons que l'étude d'un probléme physique nous ait conduit à l'équation $x' = f(t,x)$, mais qu pour ce faire nous ayons négligé quelques petites forces et que nous pensions que léquation régissant le problème réel soit plutôt $x' = f(t,x) + g(t,x)$ avec $|g(t,x)| < 0.1$.

Supposons que $f(t,x)$ admette 2 comme constante de Lipschitz et que $u(t)$ soit une solution de $x' = f(t,x)$ vérifiant $u(0) = 0$ et $u(5) = 17$. Si le système réel démarre en $t = 0$ avec la condition initiale $x_0 = 0 \pm 0.03$, que pouvons-nous dire de sa valeur en $t = 5$?