Université de Rennes 1 — Année 2007–2008
UFR Mathématiques
Module S4C02

Feuille d'exercices 6

$\boxed{\textbf{Exercice 1}}$ Intégrer les équations de Ricatti suivantes.

$$(a) \quad -(t^2+1)\tfrac{dx}{dt} + 2t^3x + (1-t^2)x^2 = (t^2+1)^2 \qquad (b) \quad (1-t^3)\tfrac{dx}{dt} + 2tx^2 - t^2x - 1 = 0$$

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ En faisant un changement de variable adéquat, résolvez les équations suivantes sur tout intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

$$(a) \quad \tfrac{dx}{dt} = \tfrac{t+1}{t^2}x - 2\tfrac{x}{t}\ln(\tfrac{x}{t}) \qquad (b) \quad (1+t^2)\tfrac{dx}{dt} = 2t(1+x^2)\arctan(x)$$

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ On considère l'équation différentielle $x' = \sin(x)$.

(a) Trouver toutes les solutions constantes (solutions de la forme $x(t) = x_0$) de cette équation. Sont-elles stables ?

(b) Résoudre l'équation. Indication : pour calculer une primitive de $\frac{1}{\sin(x)}$, utiliser un changement de variables de type “moitié d'angle”.

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ On considère l'équation différentielle $x' = x^2 - t$. Si $u(t)$ est une solution avec $u(t_0) = x_0$, où $t_0 > \frac{5}{4}$ et $x_0 < -\sqrt{t_0 - 1}$, montrer que

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) + \sqrt{t} = 0$$

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ On considère l'équation $x' = \sin(tx)$. Dessiner les isoclines associées aux pentes 0, 1 et -1. Dans le secteur triangulaire

$$\{(t,x) \mid 0 \leqslant x \leqslant t\}$$

du plan, dessiner les entonnoirs et anti-entonnoirs.

$\boxed{\textbf{Exercice 6}}$ (a) Calculer les solutions des équations différentielles $x' = x^2$ et $x' = t^2$ (il s'agit d'un rappel, on l'a déjà fait).

(b) Démontrer que la solution $u(t)$ de l'équation

$$x' = x^2 + t^2 \quad \text{satisfaisant} \quad u(0) = 0$$

tend vers $+\infty$ en temps fini. Plus exactement : montrer qu'il existe un $c \in \mathbb{R}$ tel que la solution est bien-définie sur l'intervalle $[0, c[$ et telle que $\lim_{t \to c^-} u(t) = +\infty$. En revanche, n'essayez pas de calculer la valeur exacte de c !

$\boxed{\textbf{Exercice 7}}$ Dans cet exercice (assez difficile) on va continuer l'étude de notre équation préférée

$$x' = x^2 - t$$

et on va regarder des solutions $u(t)$ satisfaisant

$$u(t_0) = x_0 \quad \text{où} \quad x_0 > \sqrt{1 + t_0}$$

(a) Dessiner une esquisse de la région du plan

$$\{(t, x) \mid x^2 - t > x^{\frac{3}{2}}\}$$

Par un argument de barrière inférieure, démontrer que la solution u doit rencontrer cette région.

(b) Par un autre argument de barrière inférieure, démontrer que la solution u doit s'échapper vers $+\infty$ en temps fini.

$\boxed{\textbf{Exercice 8}}$ Les fonctions suivantes, sont-elles Lipschitziennes ?

(*a*) $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$

(*b*) $f\colon [1, +\infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$

(*c*) $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{|x|}$

(*d*) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(0) = 0,\ f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x}) \quad (x \neq 0)$

(*e*) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(0) = 0,\ f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x^2}) \quad (x \neq 0)$