Université de Rennes 1 Année 2007–2008
UFR Mathématiques
Module S4C02

Feuille d'exercices 4

Exercice 1 De l'eau entre dans une citerne conique avec un débit de k_1 unités de volume par unité de temps. Elle s'évapore avec une débit proportionnel à l'aire de contact entre l'eacu et l'air, c'est-à-dire $V^{\frac{2}{3}}$, où V est le volume d'eau dans la citerne. Écrire l'équation différentielle vérifiée par V. Sans la résoudre, dessiner quelques solutions. Y a-t-il un équilibre ? Est-il stable ?

Exercice 2 Résoudre comme équations à variables séparables les équations suivantes.

$(a)\quad x' = tx$	$(b)\quad x' = kx^{\alpha}$	$(c)\quad x' = ax + b$
$(d)\quad (1+x)tx' + (1-t)x = 0$	$(e)\quad (1+x) - (1-t)x' = 0$	$(f)\quad (t^2 - xt^2)x' + x^2 + tx^2 = 0$
$(g)\quad (x-\alpha) + t^2x' = 0$	$(h)\quad x - (t^2 - \alpha^2)x' = 0$	$(i)\quad \frac{dx}{dt} = \frac{1+x^2}{1+t^2}$

Remarqez que la question (b) concerne en particulier le seau percé. Si vous cherchez des exemples supplémentaires, regardez l'exercice 4 sur la feuille 2. Avec une seule exception, les équations de cet exercice sont à variables séparables, et vous pouvez les résoudre.

Exercice 3 Montrer que les équations suivantes sont homogènes, et les résoudre.

$(a)\quad x' = 1 + \frac{x}{t} + \left(\frac{x}{t}\right)^2$	$(b)\quad (x-t)\ dt + (x+t)\ dx = 0$
$(c)\quad t\ dx - x\ dt = \sqrt{t^2+x^2}\ dt$	$(d)\quad (2\sqrt{xt} - x)dt + t\ dx = 0$