Université de Rennes 1 Année 2007–2008
UFR Mathématiques
Module S4C02

Feuille d'exercices 1 bis

Exercice 1 Étude de la fonction $f(x) = \sqrt{|1 - \frac{1}{x}|}$

Solution (esquisse) La fonction est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. On a $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ (car $\lim_{x\to 0} |1 - \frac{1}{x}| = +\infty$).

On voit aussi facilement que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

Calculons les dérivées de f :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x-1}{x}} & \text{si } x \notin]0,1] \\ \sqrt{\frac{1-x}{x}} & \text{si } x \in]0,1] \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x^3(x-1)}} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\cup]1, \infty[\\ \frac{-1}{2\sqrt{x^3(1-x)}} & \text{si } x \in]0,1[\end{cases}$$

et f n'est pas dérivable en $x = 1$. En fait, on a une asymptote verticale en $x = 1$, car

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{|1-\frac{1}{x}|}}{x-1} = +\infty, \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{|1-\frac{1}{x}|}}{x-1} = -\infty$$

Notre calcul de f' nous renseigne que f est croissante sur $]-\infty, 0[$ et $]1, -\infty[$, et décroissante sur $]0, 1[$.

Enfin, regardons la dérivée seconde

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2x^3(x-1)} \left(\frac{3}{2}\sqrt{x(x-1)} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} \right) & \text{si } x \notin [0,1] \\ \frac{-1}{2x^3(1-x)} \left(\frac{3}{2}\sqrt{x(1-x)} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^3}{1-x}} \right) & \text{si } x \in]0,1[\end{cases}$$

Elle, aussi, est définie en $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, et elle est positive en $]-\infty, 0[\cup]0, \frac{3}{4}[$ (donc f est convexe dans cette région), et négative en $]\frac{3}{4}, 1[\cup]1, \infty[$, et f y est concave.

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ Étude de la fonction $f(x) = (|1 + \frac{1}{x}|)^x$

Solution J'avais sous-estimé la difficulté de certains aspects de cette question !

La fonction f est définie en $\mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}$.

On a $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$. En effet, par continuité en 1 de la fonction ln, pour démontrer ceci il suffit de démontrer que $\lim_{x\to 0^+} \ln(f(x)) = 0$. Or, on a pour $x > 0$ que

$$\ln(|1 + \frac{1}{x}|)^x = x \cdot \ln(1 + \frac{1}{x}) = x \cdot \ln(x + 1) - x \cdot \ln(x) \stackrel{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0 - 0 = 0$$

De façon semblable, on démontre que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$.

Donc f possède une extension par continuité

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ f(x) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

On a $\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$. Pour le démontrer, il suffit de nouveau de démontrer que $\lim_{x\to -1} \ln(f(x)) = +\infty$. Or, on a

$$\lim_{x\to -1} x \cdot \ln(|1 + \frac{1}{x}|) = -1 \cdot \lim_{x\to -1} \ln(|1 + \frac{1}{x}|) = +\infty$$

On a aussi : $\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = e$ (ceci est bien connu, exercice)

Enfin, pour calculer la dérivée de f, on écrit $f(x) = \exp(x \cdot \ln(|1 + \frac{1}{x}|))$. On trouve, après un petit calcul que

$$f'(x) = f(x) \cdot \left(\ln(|1 + \frac{1}{x}|) + \frac{\epsilon(x)}{|1 + x|}\right) \quad \text{où} \quad \epsilon(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x > -1 \\ 1 & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

Pour l'étude des variations de f : quand x tend vers 0, on a $f(x) \to 1$, $\ln(|1 + \frac{1}{x}|) \to +\infty$, et $\frac{\epsilon(x)}{|1+x|} \to -1$, donc $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$.

Quand $x > 0$, on a $f'(x) > 0$ car $\ln(x + 1) - \ln(x) - \frac{1}{x+1} > 0$ (en effet vous avez dû voir en première année que $\frac{1}{x+1} < \ln(x + 1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$). Donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, et de façon semblable, on montre que f est aussi croissante sur $\mathbb{R}^-$.

Il doit y avoir un minimum local de la fonction f etre -1 et 0, parce que $\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, et $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$. Ce minimum est difficile à trouver explicitement.

Aussi, l'étude de la dérivée seconde devient assez désagréable.