Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
Module S4C02 Année 2007–2008

Contrôle continu 1
11 février 2008 — Durée : 1 heure

Voici l'énoncé, avec des réponses rapides. Pas tous les justifications necessaires sont incluses !

Exercice 1 Étudiez la fonction définie par la formule

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{x^5}{x-1}}$$

(a) Donner le domaine de définition et les variations de la fonction.
Réponse : Définie en $]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$. Dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, et

$$f'(x) = \left(\frac{x-1}{x^5}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{4x^5 - 5x^4}{(x-1)^2}$$

ce qui est négatif pour $x < 0$ et $x \in]1, \frac{5}{4}[$, nul en $x = \frac{5}{4}$, et positif pour $x > \frac{5}{4}$. Donc il y a des minima locaux en $x = 0$ et $x = \frac{5}{4}$.

(b) Déterminer les asymptotes en $x = \pm\infty$ et les tangentes en 0 et 1.

Réponse : f a une asymptote horizontale en $x = 0$ car $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = 0$. Asymptote verticale en $x = 1$, car $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$. Pour le comportement quand $x \to +\infty$, on a

$$\frac{f(x)}{x} = \sqrt[4]{\frac{x}{x-1}} = \sqrt[4]{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}} = \sqrt[4]{\frac{1}{1-y}} \quad \text{où} \quad y = \frac{1}{x}$$

DL de $\sqrt[4]{\frac{1}{1-y}}$ autour de $y = 0$ est $1 + \frac{1}{4}y + \frac{5}{32}y^2 + \ldots$, donc dans un voisinage de $+\infty$ on a $f(x) = x + \frac{1}{4} + \frac{5}{32\cdot x} + \ldots$, donc $f(x)$ se rapproche par le haut de l'asymptote $x + \frac{1}{4}$.

Quand $x \to -\infty$, on trouve de façon analogue que $f(x) = -x - \frac{1}{4} - \frac{5}{32\cdot x}$. Comme $-\frac{5}{32\cdot x}$ est positif, celà veut dire que f se rapproche par le haut de $-x - \frac{1}{4}$.

(c) Tracer le graphe de la fonction.

Exercice 2 On considère l'équation différentielle

$$x' = (x+t)^2$$

(a) Déterminez et dessinez les isoclines pour les pentes 0, $\frac{1}{4}$, et 1. Esquissez aussi le champ de directions et quelques solutions.

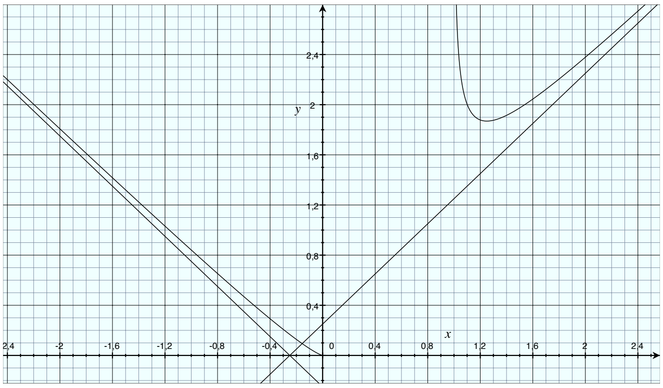

FIG. 1 – Le graphe de $\sqrt[4]{\frac{x^5}{x-1}}$ et de $x + \frac{1}{4}$ et de $-x - \frac{1}{4}$

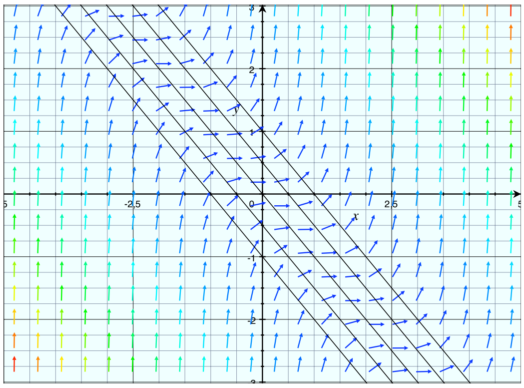

FIG. 2 – Le champ des directions et les isoclines de pente $0, \frac{1}{4}, 1$ de $x' = (x+t)^2$

Réponse : Isocline de pente 0 : $x = -t$, isocline de pente $\frac{1}{4}$: $x = -t \pm \frac{1}{2}$ (deux droites parallèles), isocline de pente 1 : $x = -t \pm 1$.

(b) Déterminez l'ensemble des points d'inflexion des solutions. (Question plus difficile)

Réponse : Dans un point d'inflexion on doit avoir $x'' = 0$. Donc : $0 = x'' = 2(x+t)(x'+1) = 2(x+t)((x+t)^2+1)$. Le dernier facteur $((x+t)^2+1)$ est toujours strictement positif, donc l'égalité est vraie si et seulement si $x + t = 0$, c'est-à-dire $x = -t$. Réciproquement, tous ces points sont des points d'inflexion, donc l'ensemble des points d'inflexion est $\{(x,t) \mid x = -t\}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ On considère l'équation différentielle

$$x' = x - t$$

(a) Cette équation, est-elle linéaire ? Est-elle à variables séparables ?

Réponse : Ici, il fallait rappeller la définition d'une équation linéaire et une équation à variables séparées ! L'équation est linéaire, mais pas à variables séparables.

(b) Soit $u(t)$ la solution de cette équation satisfaisant $u(0) = \frac{1}{2}$. Calculer, de façon approximative la valeur de $u(3)$, en utilisant la méthode d'Euler, avec un pas de taille $h = 1$.

Réponse : si v_n note la valeur approximative de $u(n)$, calculé avec la méthode de Euler, et si l'on note $f(t, x) = x - t$, alors on trouve

$$v_1 = v_0 + h \cdot f(0, v_0) = \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 1,\ v_2 = 1 + 1 \cdot f(1, 1) = 1,\ v_3 = 1 + 1 \cdot f(2, 1) = 0$$

Donc la réponse à la question est 0.