Université de Rennes

Algèbre linéaire et bilinéaire

Contrôle Continu n° 2 (1h)

Barème indicatif : 4/6/4/6.
Remarque importante : la question 4 de l'exercice 2 est plus difficile que les autres, ne perdez pas trop de temps dessus.

Exercice 1 [Question de cours]

Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie et $q : E \to k$ une forme quadratique (k est de caractéristique différente de 2).

1. Donner la définition et l'expression de la forme polaire de q.

2. Donner la définition du noyau $N(q)$ et du cône isotrope $\mathcal{C}(q)$ de q. Donner un exemple avec $\{0\} \subsetneq N(q) \subsetneq \mathcal{C}(q)$.

Exercice 2 [Endomorphismes nilpotents]

Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie (k quelconque) et $u \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme nilpotent.

1. Qu'est-ce que l'indice de nilpotence de u ? On le note d.

2. Donner le polynôme minimal μ_u de u en fonction de d ? Que vaut χ_u (polynôme caractéristique) ?

3. Donner la forme de la décomposition de Frobenius de u et faire le lien avec la décomposition de Jordan.

4. Montrer que u et λu sont semblables pour tout $\lambda \in k^*$ (on pourra raisonner sur un bloc de Jordan).

Exercice 3 [Décomposition de Jordan–Chevalley]

Soit $A \in M_3(\mathbb{C})$ une matrice antisymétrique.

1. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) = \det(A) = 0$ et en déduire que le polynôme caractéristique de A est de la forme $\chi_A(X) = X^3 - \alpha X$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$.

2. En discutant suivant que α est nul ou non, montrer que A est nilpotente ou diagonalisable. Donner la décomposition de Jordan–Chevalley de A en fonction de la valeur de α.

Exercice 4 [Réduction de Frobenius]

Soient P et Q deux polynômes unitaires de degrés respectifs p et q et considérons la matrice par blocs (de taille $p+q$)

$$A = \begin{pmatrix} C_P & 0 \\ 0 & C_Q \end{pmatrix}$$

où C_P (resp. C_Q) est la matrice compagnon associée à $P(X) = X^p - \sum_{i=0}^{p-1} a_i X^i$

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{p-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que le polynôme minimal de A est $\mu_A = \text{ppcm}(P, Q)$ (on pourra utiliser le résultat du cours $\mu_{C_P} = P$).

2. En déduire que A est cyclique si et seulement si P et Q sont premiers entre eux.

3. On suppose maintenant que P et Q ne sont plus premiers entre eux. On pose

$$R = \text{pgcd}(P, Q) \quad \text{et} \quad S = \text{ppcm}(P, Q)$$

et on écrit $P = P_1R$ et $Q = Q_1R$. On peut alors écrire (admis) $R = R_1R_2$ avec $\text{pgcd}(R_1, R_2) = \text{pgcd}(R_1, P_1) = \text{pgcd}(R_2, Q_1) = 1$. Montrer que $S = (R_1Q_1)(R_2P_1)$ et que $\text{pgcd}(R_1Q_1, R_2P_1) = 1$.

4. En utilisant la question **2**, montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} C_S & 0 \\ 0 & C_R \end{pmatrix}$$

est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} C_{R_1Q_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{R_2P_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{R_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{R_2} \end{pmatrix}$$

et que cette dernière est elle-même semblable à la matrice A.

5. Donner les invariants de similitude de A suivant que P et Q sont premiers entre eux ou non.