**Algèbre linéaire et bilinéaire**

*Contrôle Continu n° 1 (1h)*

## Exercice 1 [Question de cours]

Soient $E$ et $F$ deux $K$-espaces vectoriels de dimension finie, $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de $E$ et $\{f_1, \dots, f_m\}$ une base de $F$. On note $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ et $\{f_1^*, \dots, f_m^*\}$ les bases duales correspondantes.

**1.** Soit $k \in [\![1, \dots, n]\!]$ et $\ell \in [\![1, \dots, m]\!]$. Montrer qu'il existe une unique forme linéaire

$$\varphi_{k,\ell} : E \otimes F \to K$$

telle que pour tout $(x, y) \in E \times F$,

$$\varphi_{k,\ell}(x \otimes y) = e_k^*(x) f_\ell^*(y)$$

**2.** Montrer que $\{e_i \otimes f_j \mid (i, j) \in [\![1, \dots, n]\!] \times [\![1, \dots, m]\!]\}$ est une base de $E \otimes F$.

## Exercice 2

**1.** Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, et soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de $E$. Rappeler, lorsque $1 \leqslant p \leqslant n$, la base de $\bigwedge^p E$ donnée par le cours en fonction des $e_1, \dots, e_n$.

**2.** Soit $L \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique $(e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de $\bigwedge^2 L$ dans la base $(e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3)$ de $\bigwedge^2(\mathbb{R}^3)$.

## Exercice 3

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel, et soient $N$ et $I$ deux sous-espaces vectoriels de $E$ tels que $E = I \oplus N$. On note

$$A := \{f \in \mathrm{End}(E) \mid N \subseteq \mathrm{Ker}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f) \subseteq I\}.$$

**1.** Montrer que $A$ est un sous-espace vectoriel de $E$ stable par composition.

**2.** Si l'on note $\pi \colon E \to E/N$ la projection naturelle, montrer que l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(E/N, I) & \longrightarrow & A \\ g & \longmapsto & g \circ \pi \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Pour un $f \in A$, on note $\overline{f} \in \mathrm{Hom}(E/N, I)$ l'élément qui lui correspond via l'isomorphisme ci-dessus.

**3.** Soit $f \in A$. Montrer que $\overline{f}$ est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = N$ et $\mathrm{Im}(f) = I$. On note

$$G := \{f \in \mathrm{End}(E) \mid N = \mathrm{Ker}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f) = I\}$$

**4.** Soit $p$ le projecteur sur I parallèlement à $N$. Montrer que $p \in G$ et que $\overline{p}^{-1} = \pi_{|I}$.

**5.** Fixons un $f_0 \in G$.

(a) Montrer que

$$\begin{cases} G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(E/N) \\ g & \longmapsto & \overline{f_0}^{-1} \circ \overline{g} \end{cases}$$

est une bijection.

(b) On choisit $f_0 = p$ dans la question précédente et on note $\Phi$ la bijection obtenue. Montrer que pour tout $g, h \in G$, la composée $g \circ h$ appartient à $G$ et

$$\Phi(g \circ h) = \Phi(g) \circ \Phi(h)$$

*Indication : on pourra utiliser le résultat de la question* 4.

**6.** En déduire que $(G, \circ)$ est un groupe, d'élément neutre $p$.