Algèbre linéaire et bilinéaire

Espaces euclidiens et hermitiens

Exercice 1 [Cas hermitien]

Soit E un espace **hermitien** et $u \in \mathrm{End}(E)$ tel que :

$$\forall x \in E,\ (x, u(x)) = 0.$$

1. Montrer que $u = 0$.

2. Que dire de u vérifiant la propriété ci-dessus si E est seulement supposé euclidien ?

Exercice 2 [Un calcul d'adjoint]

Pour $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$(A, B) = \mathrm{Tr}\left({}^t A\overline{B}\right).$$

1. Montrer que c'est un produit scalaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et que la norme associée vérifie :

$$\forall A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}),\ \|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|\,.$$

2. Calculer la norme de la forme linéaire

$$\mathrm{Tr} \colon \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ A & \longmapsto & \mathrm{Tr}(A). \end{array} \right.$$

3. On fixe $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et on considère l'application linéaire

$$\Phi_A \colon \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \\ X & \longmapsto & {}^t AXA. \end{array} \right.$$

Calculer l'adjoint (pour le produit scalaire ci-dessus) de Φ_A.

Exercice 3 [Matrice de Gram]

Soit E un espace euclidien dont on note $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ le produit scalaire. Si $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille de vecteurs de E, on pose

$$G(u_1, \ldots, u_p) = (\langle u_i, u_j\rangle)_{1\leq i,j\leq p} \in \mathrm{M}_p(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que $G(u_1, \ldots, u_p)$ est symétrique positive et que

$$\mathrm{rg}(G(u_1, \ldots, u_p)) = \mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_p).$$

2. Montrer que toute matrice symétrique positive peut s'écrire sous la forme $G(u_1, \dots, u_p)$.

3. Soient $(u_1, \dots, u_p)$ et $(v_1, \dots, v_p)$ deux familles de vecteurs de E. Montrer qu'il existe $f \in O(E)$ tel que $f(u_i) = v_i$ pour tout $i = 1 \dots p$ si et seulement si $G(u_1, \dots, u_p) = G(v_1, \dots, v_p)$.

Exercice 4 [Un critère de diagonalisabilité]

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. Montrer que A est diagonalisable si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive S telle que ${}^tA = SAS^{-1}$.

Indication : montrer que tout matrice symétrique définie positive s'écrit $S = {}^tPP$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5 [Une caractérisation des symétries orthogonales]

Soit E un espace euclidien et soit $s : E \to E$ une symétrie de E (pas nécessairement orthogonale). Considérons l'endomorphisme $u = s^* \circ s$.

1. Montrer que u est symétrique défini positif et de déterminant 1. On note E_λ les espaces propres de u.

2. Montrer que si $\lambda \neq 1$ (et $\lambda > 0$) alors s réalise un isomorphisme entre E_λ et $E_{\lambda^{-1}}$.

3. En déduire que le polynôme $P_u(X) = \det(u + X\mathrm{Id}_E)$ vérifie $P_u(1) \geq 2^n$. Caractériser le cas d'égalité.

Exercice 6 [Endomorphismes de la boule unité]

Soit E un espace euclidien et $u \in L(E)$.

1. Montrer que $\|u^*\| = \|u\|$ (où $\|u\|$ désigne la norme subordonnée à la norme euclidienne de E).

2. En déduire que si $\|u\| \leq 1$ alors

$$E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}),$$

la somme ci-dessus étant orthogonale.

3. Toujours sous l'hypothèse $\|u\| \leq 1$, montrer que la suite

$$u_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u^k$$

converge vers le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.

Exercice 7 [Réduction des endomorphismes normaux — cas réel]

Soit E un espace euclidien et $u \in \text{End}(E)$.

1. Montrer que u admet toujours une droite ou un plan stable.

2. À partir de maintenant, on suppose u normal ($u \circ u^* = u^* \circ u$). Montrer que si $F \subset E$ est stable par E, $F^\perp$ est également stable par u.

3. En déduire qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de u est de la forme :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \begin{pmatrix} a_r & -b_r \\ b_r & a_r \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_i, a_j, b_j \in \mathbb{R}$.

Exercice 8 [Décomposition polaire]

On note H_n^+ (resp. H_n^{++}) l'ensemble des matrices hermitiennes positives (resp. définies positives).

1. Montrer que si $S \in H_n^+$, il existe une unique matrice $R \in H_n^+$ telle que $S = R^2$. Pour l'unicité, on se restreindra à un espace propre de S en observant que ce dernier est stable par R.

2. Montrer que si $A \in GL_n(\mathbb{C})$ alors il existe un unique couple $(S, U) \in H_n^{++} \times U_n$ vérifiant $A = SU$ (le couple (S, U) s'appelle la *décomposition polaire* de A).

Exercice 9 [Isométries d'un espace euclidien]

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ ainsi que de la distance associée $d(x, y) = \|x - y\|$. Une *isométrie* de $\mathbb{R}^n$ est une application $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ d(u(x), u(y)) = d(x, y).$$

1. Soit u une isométrie vérifiant $u(0) = 0$. Montrer que $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ puis que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ (u(x), u(y)) = (x, y).$$

En déduire que u est linéaire.

2. Montrer qu'en général toute isométrie de $\mathbb{R}^n$ est la composée d'une translation avec une isométrie vectorielle.