Algèbre linéaire et bilinéaire

Formes quadratiques

Exercice 1 [Orthogonalité]

Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme quadratique q (de forme polaire f_g et de noyau $N(q)$). Si $F \subset E$ est un sous-espace, on note $F^\perp \subset E$ son orthogonal pour la forme q :

$$F^\perp := \{x \in E \mid \forall y \in F,\ f_q(x,y) = 0\}.$$

1. Montrer que si F et G sont deux sous-espaces de E, alors $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

2. On note $\widehat{f}_q : E \to E^*$ l'application induite par f_q. Montrer que si $F \subset E$ est un sous-espace, alors on a

$$F^\perp = {}^\circ\left(\widehat{f}_q(F)\right)$$

où ${}^\circ A$ (avec $A \subset E^*$) est l'orthogonal pour la dualité, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs de E qui s'annulent sur les éléments de A. En déduire que

$$\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F) + \dim(N(q) \cap F). \tag{1}$$

3. Pour F et G deux sous-espaces de E, montrer que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$, puis, en utilisant la formule de Grassman et la question précédente, montrer que

$$F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp.$$

4. Si F est un sous-espace, montrer que $F + N(q) \subset F^{\perp\perp}$. À nouveau, calculer $\dim(F^{\perp\perp})$ et conclure que $F + N(q) = F^{\perp\perp}$.

5. Vérifier ces affirmations sur l'espace $E = k^3$ muni de la forme quadratique dont l'expression dans la base canonique est $q(x,y,z) = 2xy$ et en fixant $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$.

Exercice 2 [Restriction d'une forme non dégénérée]

Soient E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme quadratique q et F un sous-espace de E.

1. Calculer $N\left(q_{|F}\right)$ et en déduire que $q_{|F}$ est non dégénérée si et seulement si $F \cap F^\perp = \{0\}$.

2. On suppose maintenant q non dégénérée (sur E). Montrer que $q_{|F}$ est non dégénérée si et seulement si $E = F \oplus F^\perp$ (utiliser la formule (1)).

Exercice 3 [Forme quadratique sur les matrices]

Soit $n \geq 1$ un entier. On considère la forme bilinéaire $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB)$ sur $\mathrm{M}_n(k)$ (avec k un corps de caractéristique différente de 2).

1. Montrer que cette forme est non dégénérée.

2. Calculer sa signature lorsque $k = \mathbb{R}$ (penser aux matrices symétriques et antisymétriques).

3. Que se passe-t-il si l'on considère la forme bilinéaire $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B)$?

Exercice 4 [Algorithme de Gauß]

Appliquer l'algorithme de Gauß aux formes quadratiques réelles suivantes :

(1) $q_1(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - z^2 + 3xy - 4xz$;

(2) $q_2(x, y, z) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz$;

(3) $q_3(x, y, z, t) = xy + yz + zt + tx$;

(4) $q_4(x, y, z, t, s) = xy - xt + yz - yt + ys + zt - zs + 2st$.

Dans chaque cas, préciser la signature de la forme quadratique.

Exercice 5 [Signature à paramètre]

Soient $a \in \mathbb{R}$ et q_a la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$qa(x, y, z) = x^2 + (1 + a)y^2 + (1 + a + a^2)z^2 + 2xy - 2ayz.$$

Discuter suivant les valeurs de a le rang et la signature de q_a.

Exercice 6 [Forme quadratique définie (cas réel)]

Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et q une forme quadratique anisotrope : $q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Montrer que q est définie positive ou définie négative.

Exercice 7 [Partie réelle d'une forme complexe]

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et q une forme quadratique sur E. Montrer que l'expression $q_{\mathbb{R}}(x) = \mathrm{Re}(q(x))$ définit une forme quadratique sur le sous-espace réel E (en oubliant que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel) et calculer la signature de $q_{\mathbb{R}}$ en fonction du rang de q.

Exercice 8 [Formes sur $\mathbb{Q}$]

1. Montrer que si p_1 et p_2 sont deux entiers premiers distincts, alors $\overline{p_1} \neq \overline{p_2}$ dans $\mathbb{Q}^\times/(\mathbb{Q}^\times)^2$.

2. En déduire que $\mathbb{Q}^n$ admet une inifinité de formes quadratiques non congruentes.

Exercice 9 [Sous-espaces totalement isotropes]

Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni que q non dégénérée.

1. Si F est un sous-espace *totalement isotrope* (cela signifie que $q_{|F} = 0$), montrer que $F \subset F^\perp$ et en déduire que $2\dim(F) \leq \dim(E)$.

2. Donner un exemple où l'égalité se produit.

3. On suppose que E possède un vecteur isotrope non nul $x \in E$ (avec donc $q(x) = 0$). Montrer qu'il existe $y \in E$ avec $q(y) = 0$ et $f_q(x, y) = 1$, c'est-à-dire que E contient un plan hyperbolique U.

4. Montrer qu'il existe une décomposition orthogonale

$$E = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m \oplus F$$

avec $q_{|U_i}$ hyperbolique pour tout $i = 1 \ldots m$ et $q_{|F}$ *anisotrope*, c'est-à-dire : $x \in F$ et $q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

5. Montrer enfin que $2m \leq \dim(E)$.