Algèbre linéaire et bilinéaire

Compléments d'algèbre linéaire

Exercice 1 [Un compagnon de route !]

On se donne $n \geq 1$ un entier, k un corps et P un polynôme unitaire de degré n.

1. Montrer que le quotient $E_P := k[X]/(P)$ est un k-espace vectoriel de dimension n (la notation (P) désigne l'idéal engendré par P) et que la multiplication par X induit naturellement un endomorphisme de E_P (noté u_P dans la suite).

2. Calculer le polynôme caractéristique de u_P en écrivant sa matrice dans une base naturelle.

3. En déduire que si k n'est pas algébriquement clos, il existe un espace E de dimension finie sur k et un endomorphisme de E sans valeurs propres dans k.

Exercice 2 [Bases duales]

Considérons l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré $\leq n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour les familles de formes linéaires suivantes, montrer qu'elles forment des bases de E^* et fournir les bases de E dont elles sont duales :

(1) $\varphi_i(P) := \frac{P^{(i)}(a)}{i!}$ avec $i = 0 \ldots n$ et $a \in \mathbb{R}$ fixé.

(2) $\varphi_i(P) := P(a_i)$ avec $i = 0 \ldots n$ et $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ des réels fixés.

(3) $\varphi_i(P) := \int_0^{a_i} P(t)dt$ avec $i = 0 \ldots n$ et $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ des réels fixés.

Si $(P_i)_{i=0\ldots n}$ désigne la base duale de $(\varphi_i)_{i=0\ldots n}$, comment appelle-t-on les formules $P = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(P)P_i$ dans les cas (1) et (2) ?

Exercice 3 [Dual de $\mathrm{End}(E)$]

Ici E désigne un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k.

1. On se donne $u \in \mathrm{End}(E)$. Montrer que l'application :

$$\mathrm{Tr}(u-) \colon \begin{cases} \mathrm{End}(E) & \longrightarrow & k \\ v & \longmapsto & \mathrm{Tr}(uv). \end{cases}$$

est une forme linéaire sur $\mathrm{End}(E)$.

2. Montrer que l'application

$$\begin{cases} \mathrm{End}(E) & \longrightarrow & \mathrm{End}(E)^* \\ u & \longmapsto & \mathrm{Tr}(u-). \end{cases}$$

est un isomorphisme. Interprétation en termes de produit tensoriel ?

Exercice 4 [Dual d'un endomorphisme I]

Soit $u : E \to E$ un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie. On considère ${}^t u : E^* \to E^*$ l'endomorphisme dual associé à u défini par ${}^t u(f) = f \circ u$.

1. On fixe une base $\mathcal{B}$ de E et on note $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u dans cette base. Donner la matrice de ${}^t u$ dans la base $\mathcal{B}^*$, base duale de $\mathcal{B}$.

2. En déduire que si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux bases de E, alors on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1^*}^{\mathcal{B}_2^*} = {}^t\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}\right)^{-1}.$$

Exercice 5 [Dual d'un endomorphisme II]

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie (sur k) et $u : E \to F$ un application linéaire. On considère ${}^t u : F^* \to E^*$ l'endomorphisme dual associé à u défini par ${}^t u(f) = f \circ u$.

1. Calculer $\mathrm{Ker}({}^t u)$ et $\mathrm{Im}({}^t u)$ en fonction de $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.

2. En déduire que ${}^t u$ est injective (resp. surjective) si et seulement si u est surjective (resp. injective).

3. Dans le cas où $E = F$, exprimer la relation qui existe entre ${}^t({}^t u) : E^{**} \to E^{**}$ et u.

Exercice 6 [Complexification I]

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (de dimension finie).

1. Montrer que l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times E^2 & \longrightarrow & E^2 \\ (z = x + iy, (v, w)) & \longmapsto & (xv - yw, yv + xw) \end{array} \right.$$

permet de munir E^2 (avec l'addition usuelle) d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On note $\mathbb{C}E$ l'espace obtenu.

2. Montrer que $\mathbb{C}E$ et $E_{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes E$ sont isomorphes.

3. Montrer que si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E alors $((e_1, 0), \dots, (e_n, 0))$ est une base de $\mathbb{C}E$.

Exercice 7 [Complexification II]

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une application linéaire $J : E \to E$ vérifiant $J^2 = -\mathrm{id}_E$.

1. Montrer que $\dim(E)$ est paire. Montrer que l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times E & \longrightarrow & E \\ (z = x + iy, v) & \longmapsto & xv + yJ(v) \end{array} \right.$$

permet de munir E d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

2. Montrer que l'extension de J à l'espace $\mathsf{E}_{\mathbb{C}}$ est diagonalisable, donner ses valeurs propres et décriver les espaces propres associés (par exemple à l'aide d'une base bien choisie de E).

Exercice 8 [Produit tensoriel de morphismes]

Soient $u : E_1 \to E_2$ et $v : F_1 \to F_2$ deux applications linéaires entre espaces vectoriels de dimension finie. On fixe des bases $(e_i^{(k)})$ de E_k et $(f_j^{(\ell)})$ de F_ℓ (avec $k, \ell \in \{1, 2\}$) et on note U et V les matrices de u et v dans ces bases. On considère l'application linéaire

$$u \otimes v \colon E_1 \otimes E_2 \longrightarrow F_1 \otimes F_2$$

définie par $u \otimes v(x \otimes y) := u(x) \otimes v(y)$.

1. Donner la matrice de $u \otimes v$ dans les bases $(e_i^{(1)} \otimes e_j^{(2)})$ et $(f_\alpha^{(1)} \otimes f_\beta^{(2)})$.

2. On se place dans la situation $E_1 = E_2 = E$ et $F_1 = F_2 = F$. Calculer $\mathrm{Tr}(u \otimes v)$ et $\det(u \otimes v)$ en fonction des traces et des déterminants de u et v, ainsi que des dimensions de E et F.

Exercice 9 [Produit extérieur et quotient]

Soit $\pi : E \to G$ une application linéaire **surjective** de noyau $F = \mathrm{Ker}(\pi)$ (donc $G \simeq E/F$).

1. On note $r := \dim(F)$ et on se donne $1 \leq k \leq \dim(G)$ un entier. Montrer qu'il existe une application injective *naturelle* :

$$\bigwedge^k G \otimes \det(F) \hookrightarrow \bigwedge^{k+r} E.$$

2. Pour $k = \dim(G)$, en déduire que $\det(F) \otimes \det(G) \simeq \det(E)$ puis que si $u \in \mathrm{End}(E)$ vérifie $u(F) \subset F$ alors $\det(u) = \det(u_{|F}) \det(\overline{u})$ où $\overline{u} : G \to G$ est l'endomorphisme induit par u sur G.

Exercice 10 [Changement de coefficients]

1. Soit k un corps, E un k-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathrm{End}(E)$. Montrer qu'il est toujours possible de trouver L/k une extension finie telle que l'endomorphisme $u_L : E_L \to E_L$ (avec $E_L = L \otimes E$) admette une valeur propre dans L.

2. On se donne maintenant $u : E \to F$ une application k-linéaire entre deux k-espaces vectoriels et on fixe L/k une extension de corps. Montrer que les morphismes canoniques

$$L \otimes \mathrm{Ker}(u) \longrightarrow \mathrm{Ker}(u_L) \quad \text{et} \quad L \otimes \mathrm{Im}(u) \longrightarrow \mathrm{Im}(u_L)$$

sont des isomorphismes. En déduire que u_L est injectif (resp. surjectif) si et seulement si u l'est.

3. On suppose $E = F$ de dimension finie sur k. Montrer que u_L et u ont même rang, même déterminant et même polynôme caractéristique. Quid du polynôme minimal ?

Exercice 11 [L'algèbre $\mathrm{End}(E)$]

Ici E désigne un espace vectoriel de dimension finie (sur un corps quelconque).

1. On rappelle que $\mathrm{End}(E) \simeq E^* \otimes E$. Montrer que la structure d'algèbre est induite par l'application :

$$\begin{cases} (E^* \otimes E) \otimes (E^* \otimes E) & \longrightarrow & (E^* \otimes E) \\ (f \otimes x) \otimes (g \otimes y) & \longmapsto & f(y) g \otimes x. \end{cases}$$

2. Montrer que les automorphismes d'algèbre de $\mathrm{End}(E)$ sont intérieurs : si $\varphi : \mathrm{End}(E) \to \mathrm{End}(E)$ est un automorphisme, alors il existe $u_\varphi \in \mathrm{End}(E)$ tel $\forall v \in \mathrm{End}(E)$, $\varphi(v) = u_\varphi^{-1} \circ v \circ u$.

3. Montrer que $\mathrm{End}(E)$ est une algèbre simple : les seuls idéaux bilatères de $\mathrm{End}(E)$ sont $\{0\}$ et $\mathrm{End}(E)$ elle-même.

Exercice 12 [Idéaux à gauche de $\mathrm{End}(E)$]

On fixe $F \subset E$ un sous-espace de E (espace vectoriel de dimension finie sur un corps k) et on considère

$$\mathcal{I}_F := \{u \in \mathrm{End}(E) \mid F \subset \mathrm{Ker}(u)\}.$$

1. Vérifier que $\mathcal{I}_F$ est un idéal à gauche de $\mathrm{End}(E)$ et que

$$\bigcap_{u \in \mathcal{I}_F} \mathrm{Ker}(u) = F.$$

Réciproquement, considérons $\mathcal{I} \subset \mathrm{End}(E)$ un idéal à gauche et notons

$$F_{\mathcal{I}} := \bigcap_{u \in \mathcal{I}} \mathrm{Ker}(u).$$

2. Soient $u \in \mathcal{I}$ et $v \in \mathrm{End}(E)$ tels que $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$. Montrer que $v \in \mathcal{I}$.

3. Si p et q sont 2 projecteurs qui sont de plus dans $\mathcal{I}$, montrer qu'il existe un projecteur $r \in \mathcal{I}$ tel que $\mathrm{Ker}(r) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

4. Construire un projecteur $p \in \mathcal{I}$ tel que $\mathrm{Ker}(p) = F_{\mathcal{I}}$ et conclure que $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{F_{\mathcal{I}}}$.

Les idéaux à gauche de $\mathrm{End}(E)$ sont donc exactement paramétrés par les sous-espaces vectoriels de E. Qu'en est-il des idéaux à droite ? ?