Université de Rennes 1
Année 2020/2021

Master 2

Théorie Ergodique et Systèmes Dynamiques–TD1

1 - Montrer que la suite de terme général $x_n = (\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}))^n$ n'est pas équirépartie modulo 1. [*Indication :* Soient $x = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ et $y = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$. Vérifier que $x^n + y^n$ est un entier pour tout $n \geq 0$.]

2 - (Une suite dense non équidistribuée) Donner un exemple d'une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de nombres dans $[0,1]$ qui est dense dans $[0,1]$ mais non équidistribuée.

3 - (Equidistribution et puissances de 2) Pour $n \in \mathbf{N}$, on considère le développement décimal $2^n = a_n 10^{p_n} + a_{n-1}10^{p_n - 1} + \cdots + a_0$, avec $0 \leq a_i \leq 9$ et $0 < a_n$
(i) Montrer que $\log_{10} a_n \leq \{n \log_{10} 2\} < \log_{10}(a_n + 1)$.
(ii) Soit $k \in [1, 9[$ un entier ; montrer que, dans la suite

$$(2^n)_{n\in\mathbf{N}} = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...$$

des puissances de 2, la proportion de celles dont le premier chiffre du développement décimal est k est asymptotiquement égal à $\log_{10}(\frac{k+1}{k})$. Quel est le chiffre le plus fréquent ? [*Indication :* Considérer l'application $x \mapsto x + \alpha(\mod 1)$ pour $\alpha = \log_{10} 2$]

4 (Multiplication par m**)** - Soit $m \in \mathbf{N}$ avec $m \geq 1$ et $E_m : [0,1[\to [0,1[$ défini par $E_m x = mx \,\mathrm{mod} 1$. Montrer que E_m préserve la mesure de Lebesgue λ sur $[0,1[$.

5 - Soit $T : [0,1] \to [0,1]$ défini par $T(x) = x/2$ pour $0 < x \leq 1$ et $T(0) = 1$. Montrer qu'il n'existe pas de mesure de probabilité T-invariante sur la tribu des Boréliens de $[0,1]$.

6 - Soit X un ensemble muni d'une algèbre de Boole $\mathcal{E}$, c-à-d d'un ensemble de parties, contenant X, stable par intersection finie et par passage au complémentaire. Soit $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E})$ la tribu engendrée par $\mathcal{E}$.
(i) Soient μ et ν deux mesures de probabilité sur $\mathcal{B}$ telles que $\mu(B) = \mu(B)$ pour tout $B \in \mathcal{E}$. Montrer que $\mu = \nu$.
[*Indication :* Théorème des classes monotones.]
(ii) Soit $T : X \to X$ une transformation $\mathcal{B}$-mesurable telle que $\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B)$ pour tout $B \in \mathcal{E}$. Montrer que μ est T-invariante.

7 (Récurrence, système induit) - Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique préservant une mesure de probabilité. Soit $A \in \mathcal{B}$ avec $\mu(A) > 0$. On définit une mesure de probabilité sur A par $\mu_A(B) = \mu(B)/\mu(A)$ pour $B \in \mathcal{A}$, où $\mathcal{A} = \{B \in \mathcal{B} \mid B \subset A\}$.

Pour $x \in A$, soit $n(x) = \min\{n \geq 1 \mid T^n x \in A\}$ ("temps du premier retour"), avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. Pour $x \in A$ tel que $n(x) < +\infty$ on pose $T_A x = T^{n(x)}(x)$,
(i) Montrer que, pour presque tout $x \in A$, on a $n(x) < +\infty$.
(ii) Montrer que T_A préserve μ_A.