Université de Rennes 1
Année 2011/2012

Licence 3

Espaces vectoriels normés–Feuille de TD 9

Exercice 1 (Parties relativement compactes de ℓ^p) Pour $p \in [1, \infty[$, soit A une partie de $\ell^p = \ell^p_{\mathbf{C}}(\mathbf{N})$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:
(i) A est relativement compacte;
(ii) pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|^p \leq \epsilon$ pour tout $a = (a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in A$.

Exercice 2 (Séparation d'un point et d'un sous-espace vectoriel par des formes linéaires continues) Soient E un espace vectoriel normé, F un sous-espace vectoriel fermé propre de E et $x_0 \in E \setminus F$. Soit $\delta := \inf_{x \in F} \|x - x_0\|$. Montrer qu'il existe $\varphi \in E'$ avec $\varphi|_F = 0$, $\varphi(x_0) = \delta$ et $\|\varphi\| = 1$.

Exercice 3 (Une caractérisation de l'adhérence d'un sous-espace vectoriel) Soient E un espace vectoriel normé, S une partie de E et $x_0 \in E$. Soit F l'adhérence de $\mathrm{Vect}(S)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:
(i) $x_0 \in F$;
(ii) pour toute $\varphi \in E'$ telle que $\varphi|_S = 0$, on a $\varphi(x_0) = 0$.

Indication: utiliser l'Exercice 2.

Exercice 4 (Le prédual d'un espace vectoriel normé séparable est séparable) Soit E un espace vectoriel normé. On suppose que le dual E' de E est séparable.
(i) Montrer que $S = \{\varphi \in E' \ : \ \|\varphi\| = 1\}$ est séparable.
Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite dense dans S.
(ii)Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $x_n \in E$ avec $\|x_n\| = 1$ et $|\varphi_n(x_n)| \geq 1/2$.
(iii) Soit A le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel engendré par $\{x_n \ : \ n \in \mathbf{N}\}$. Montrer que A est une suite dense dans E.

Indication: Considérer l'adhérence F de A et utiliser l'Exercice 2 ou l'Exercice 3

Exercice 5 (Un problème d'interpolation) Soient E un espace vectoriel normé sur $\mathbf{K}$, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'élements de E et α_n une suite de scalaires dans $\mathbf{K}$. Soit $C > 0$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:
(i) il existe $\varphi \in E'$ avec $\|\varphi\| \leq C$ telle que $\varphi(x_n) = \alpha_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$;
(ii) pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tous $(\lambda_1, \dots \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$, on a

$$|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k| \leq C \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\|.$$

Exercice 6 (Moyennes invariantes) Soit $\ell^\infty_{\mathbf{R}}$ l'espace de Banach des suites réelles bornées. Soit $T : \ell^\infty_{\mathbf{R}} \to \ell^\infty_{\mathbf{R}}$ l'opérateur de décalage à droite défini par

$$T(a_0, a_1, a_2, \dots) = (a_1, a_2, a_3, \dots) \qquad \text{pour tout} \quad (a_0, a_1, a_2, \dots) \in \ell^\infty_{\mathbf{R}}.$$

Soit $F \subset \ell^\infty_{\mathbf{R}}$ l'image de $I - T$.

On note $\mathbf{1}$ la suite $(1, 1, 1, \dots) \in \ell^\infty_{\mathbf{R}}$.
(i) Montrer que $\|1 - (x - Tx)\|_\infty \geq 1$ pour tout $x \in \ell^\infty_{\mathbf{R}}$. En déduire que $d(\mathbf{1}, F) = 1$.

Indication: Distinguer les cas selon que $(x_n)_n$ est décroissante ou non.

(ii) Montrer qu'il existe une forme linéaire continue m sur $\ell^\infty_{\mathbf{R}}$ telle que $\|m\| = 1$, $m(\mathbf{1}) = 1$ et $m(x) = m(Tx)$ pour tout $x \in \ell^\infty_{\mathbf{R}}$.

Indication: utiliser l'Exercice 2.

(iii) Soit c_0 le sous-espace des suites $x = (x_n)_n$ avec $\lim_n x_n = 0$. Montrer que $m(x) = 0$ pour tout $x \in c_0$.
Indication: Montrer que $x - T^k x \in F$ et que $m(x) = m(T^k x)$ pour tout $x \in \ell^\infty_{\mathbf{R}}$ et $k \in \mathbf{N}$.
(iv) Montrer que, pour tout suite réelle convergente $x = (x_n)_n$, on a $m(x) = \lim_n x_n$.