

Espaces vectoriels normés—Feuille de TD 8

Exercice 1 (Noyau et image d'un opérateur) Soient \mathcal{H} et \mathcal{K} deux espaces de Hilbert et soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$.

- (i) Montrer que $\ker T = (T^*(\mathcal{K}))^\perp$;
- (ii) Montrer que l'adhérence de $T(\mathcal{H})$ est $(\ker T^*)^\perp$.

Exercice 2 (Norme d'un opérateur) Soient \mathcal{H}, \mathcal{K} des espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Montrer que $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

Indication: Pour montrer que $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$, considérer $\|Tx\|^2$ pour $x \in \mathcal{H}$.

Exercice 3 (Test de Schur) Pour tout $(i, j) \in \mathbf{N}^2$, on se donne des nombres réels $a_{ij} \geq 0, p_i > 0, q_j > 0$. On suppose qu'il existe $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ tels que $\sum_{i \in \mathbf{N}} a_{ij} p_i \leq \beta q_j$ pour tout $j \in \mathbf{N}$ et $\sum_{j \in \mathbf{N}} a_{ij} q_j \leq \gamma p_i$ pour tout $i \in \mathbf{N}$.

- (i) Soit $x = (x_j)_{j \in \mathbf{N}}$ une suite dans c , c-à-d $(x_j)_{j \in \mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ et $x_j \neq 0$ pour au plus un nombre fini de $j \in \mathbf{N}$ (voir TD 3, Exercice 7). Montrer que

$$\sum_{i \in \mathbf{N}} \left| \sum_{j \in \mathbf{N}} a_{ij} x_j \right|^2 \leq \beta \gamma \sum_{j \in \mathbf{N}} |x_j|^2.$$

Indication: montrer avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $\sum_{i \in \mathbf{N}} \left| \sum_{j \in \mathbf{N}} a_{ij} x_j \right|^2 \leq \sum_{i \in \mathbf{N}} \left(\sum_{j \in \mathbf{N}} a_{ij} q_j \right) \left(\sum_{j \in \mathbf{N}} a_{ij} |x_j|^2 / q_j \right)$.

- (ii) On considère l'application linéaire $T : c \mapsto \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$, définie par $Tx = \left(\sum_{j \in \mathbf{N}} a_{ij} x_j \right)_{i \in \mathbf{N}}$ pour $x = (x_j)_{j \in \mathbf{N}} \in c$. Montrer que T s'étend en une application linéaire continue $T : \ell^2(\mathbf{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbf{N})$ telle que $\langle Te_j | e_i \rangle = a_{ij}$ pour tout $(i, j) \in \mathbf{N}^2$ et que $\|T\| \leq \sqrt{\beta \gamma}$.

Exercice 4 (Matrice de Hilbert) Pour tout $(i, j) \in \mathbf{N}^2$, on pose $a_{ij} = 1/(i+j+1), p_i = q_i = 1/\sqrt{i + \frac{1}{2}}$.

- (i) Soit $j \in \mathbf{N}$. Montrer que $\sum_{i \in \mathbf{N}} a_{ij} p_i \leq \pi/\sqrt{j + \frac{1}{2}}$.

Indication: comparer $\sum_{i \in \mathbf{N}} a_{ij} p_i$ avec l'intégrale $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+j+1/2)\sqrt{x}}$.

- (ii) En utilisant l'exercice 3, montrer qu'il existe une application linéaire continue $T : \ell^2(\mathbf{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbf{N})$ telle que $\langle Te_j | e_i \rangle = \frac{1}{i+j+1}$ pour tout $(i, j) \in \mathbf{N}^2$ et que $\|T\| \leq \pi$.

Exercice 5 (Le spectre d'un opérateur) Soit E un espace de Banach. Soit $T \in \mathcal{B}(E)$. Le spectre $\sigma(T)$ de T est l'ensemble des $\lambda \in \mathbf{C}$ tels que $T - \lambda I$ n'est pas bijective. On rappelle que, si $\lim_n \|T^n\|^{1/n} < 1$ (par exemple, si $\|T\| < 1$) alors $I - T$ est inversible (voir TD 2, Exercice 11). Montrer que $|\lambda| \leq \lim_n \|T^n\|^{1/n} \leq \|T\|$ pour tout $\lambda \in \sigma(T)$.

Exercice 6 (Spectre de l'opérateur de Volterra) Soit $V \in \mathcal{B}(L^2[0, 1])$ l'opérateur de Volterra défini par $Vf(x) = \int_0^x f(t)dt$ pour tous $f \in L^2[0, 1]$ et $x \in [0, 1]$ (voir TD 7, Exercice 5).

- (i) Montrer que, si $\lambda \in \mathbf{C}$ appartient au spectre $\sigma(V)$ de V , alors $\lambda = 0$.
- (ii) Montrer que $0 \in \sigma(V)$.

Indication: que peut-on dire des fonctions g appartenant à l'image de V ? En déduire que V n'est pas surjectif.

Exercice 7 (Spectre de l'opérateur de décalage) Soit $S : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ l'opérateur de décalage à gauche défini par $S(x_n)_{n \in \mathbf{N}} = (x_{n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ pour $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^2$ (voir TD 6, Exercice 4).

- (i) Montrer que $\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \leq 1\}$.
- (ii) Déterminer le spectre $\sigma(S^*)$ de S^* .