

Espaces vectoriels normés—Feuille de TD 6

**Exercice 1 (Base de Haar)** Soit  $(H_p)_{p \in \mathbf{N}}$  la famille de fonctions sur  $[0, 1]$  définies par:  $H_0 = 1$  et, pour  $n \in \mathbf{N}$  et  $1 \leq k \leq 2^n$ ,

$$H_{2^n+k-1}(x) = \begin{cases} 2^{n/2} & \text{si } x \in ](2k-2)2^{-n-1}, (2k-1)2^{-n-1}[ \\ -2^{n/2} & \text{si } x \in ](2k-1)2^{-n-1}, 2k2^{-n-1}[ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(i) Dessiner le graphe de  $H_1, H_2, H_3$ .

(ii) Montrer que  $(H_p)_{p \in \mathbf{N}}$  est une famille orthonormée de  $L^2[0, 1]$ .

Soit  $f \in L^2[0, 1]$  tel que  $\langle f | H_p \rangle = 0$  pour tout  $p \in \mathbf{N}$ . On pose  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

(iii) Montrer que

$$-F\left(\frac{2k-2}{2^{n+1}}\right) + 2F\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right) - F\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right) = 0,$$

pour tout  $n \in \mathbf{N}$  et  $1 \leq k \leq 2^n$ .

(iv) Montrer que  $F = 0$ .

*Indication:* Montrer d'abord que  $F$  est continue.

(v) Montrer que  $f = 0$  et en déduire que  $(H_p)_{p \in \mathbf{N}}$  est base hilbertienne de  $L^2[0, 1]$ .

**Exercice 2 (Espaces invariants)** Soient  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert,  $\mathcal{K}$  un sous-espace vectoriel fermé de  $\mathcal{H}$  et  $P : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$  la projection orthogonale sur  $\mathcal{K}$ . Soit  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . On dira que  $\mathcal{K}$  est  $T$ -invariant si  $T(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$ . On dira que  $\mathcal{K}$  réduit  $T$  si  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{K}^\perp$  sont  $T$ -invariants.

(i) Montrer que  $\mathcal{K}$  est  $T$ -invariant si et seulement si  $PTP = TP$ .

(ii) Montrer que  $\mathcal{K}^\perp$  est  $T$ -invariant si et seulement si  $\mathcal{K}$  est  $T^*$ -invariant.

(iii) Montrer que  $\mathcal{K}$  réduit  $T$  si et seulement si  $TP = PT$ .

**Exercice 3 (Caractérisation d'une projection orthogonale)** Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert et  $P : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  une application linéaire continue. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i)  $P$  est une projection orthogonale sur un sous-espace fermé de  $\mathcal{H}$ .

(ii)  $P^2 = P$  et  $P^* = P$ .

**Exercice 4 (Opérateur de décalage)** Soit  $S : \ell^2 \rightarrow \ell^2$  l'opérateur de décalage à gauche défini par

$$S(x_n)_{n \in \mathbf{N}} = (x_{n+1})_{n \in \mathbf{N}} \quad \text{pour tout } (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^2.$$

(i) Calculer  $S^*$  ainsi que  $S^*S$  et  $SS^*$ .

(ii) Pour  $\lambda \in \mathbf{C}$ , déterminer  $\ker(S^* - \lambda I)$  et  $\ker(S - \lambda I)$ .