

Espaces vectoriels normés—Feuille de TD 5

Exercice 1 (Théorème de Lax-Milgram) Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. On suppose qu'il existe une constante $c > 0$ tel que

$$\langle Tx|x \rangle \geq c\|x\|^2 \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{H}.$$

- (i) Montrer que $\|Tx\| \geq c\|x\|$ pour tout $x \in \mathcal{H}$.
- (ii) Montrer que l'image $\text{Im}(T)$ de T est un sous-espace complet de \mathcal{H} .
- (iii) Montrer que $\text{Im}(T)$ est fermé dans \mathcal{H} .
- (iv) Montrer que $\text{Im}(T)^\perp = \{0\}$.
- (v) Montrer que T est surjective.
- (vi) Montrer que T est bijective et que T^{-1} est continue.

Exercice 2 (Un exemple d'un sous-espace non dense et d'orthogonal nul) On considère $C_{\mathbf{R}}[0, 1]$ muni du produit scalaire

$$(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Soit F le sous-espace vectoriel de $C_{\mathbf{R}}[0, 1]$ formé des fonctions f telles que $\int_{1/2}^1 f(t)dt = 0$.

- (i) Montrer que F n'est pas dense dans $C[0, 1]$.
- (ii) Montrer que $F^\perp = \{0\}$.

Exercice 3 (Dualité dans les espaces ℓ^p) Soient $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $1/p + 1/q = 1$.

Pour $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^p$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^q$, on pose

$$\varphi_x(y) = \sum_{n \in \mathbf{N}} x_n y_n.$$

- (i) Soit $x \in \ell^p$. Montrer que φ_x est bien définie et que φ_x est une forme linéaire continue sur ℓ^q de norme $\|\varphi_x\| = \|x\|_p$.

Indication: On pourra utiliser l'Exercice 3, TD 3.

- (ii) Montrer que l'application linéaire

$$\varphi : \ell^p \rightarrow (\ell^q)', \quad x \mapsto \varphi_x$$

est une isométrie.

Soit c l'espace vectoriel des suites $(x_n)_n$ de support fini et à coefficients dans \mathbf{K} . (On observera que $c \subset \ell^q$ pour tout $q \in [1, +\infty[$.)

(iii) Soit $f : c \rightarrow \mathbf{K}$ une forme linéaire. Montrer qu'il existe une unique suite $x = (x_n)_n$ d'éléments de \mathbf{K} telle que

$$f(y) = \sum_{n \in \mathbf{N}} x_n y_n \quad \text{pour tout } y = (y_n)_n \in c.$$

(iv) Soit $F : \ell^q \rightarrow \mathbf{K}$ une forme linéaire continue. Soit $f = F|_c$ sa restriction à c et soit x la suite qui lui est associée en (ii). Montrer que $x \in \ell^p$.

(v) On suppose que $p \neq 1$. Montrer que l'application linéaire et isométrique

$$\varphi : \ell^p \mapsto (\ell^q)', \quad x \mapsto \varphi_x$$

est une bijection.

Indication: Utiliser l'Exercice 8, TD 3.

Exercice 4 (Polynômes de Legendre) On considère la famille des monômes $D = \{p_n : t \mapsto t^n : n \in \mathbf{N}\}$ dans $L^2[-1, 1]$.

(i) Montrer que D est totale.

Indication: Montrer d'abord que D est totale dans $C[-1, 1]$, en utilisant le théorème de Weierstrass.

Pour $n \in \mathbf{N}$, soit

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} ((x^2 - 1)^n)$$

le n -ième polynôme de Legendre.

(ii) Calculer P_0, P_1, P_2 .

(iii) Montrer que $\langle P_n | p_m \rangle = 0$ pour tout $m < n$.

(iv) On pose $e_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n$. Montrer que $\{e_n : n \in \mathbf{N}\}$ est une base hilbertienne de $L^2[-1, 1]$.

(v) Pour quels nombres réels a, b, c l'intégrale

$$I = \int_{-1}^1 (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 dx.$$

est-elle minimale?