

Espaces vectoriels normés—Feuille de TD 4

Exercice 1 (Caractérisation normique des espaces de Hilbert) Soient E un espace vectoriel réel et $f : E \rightarrow \mathbf{R}_+$ telle que

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y) \quad \text{pour tous } x, y \in E.$$

- (i) Montrer que $f(0) = 0$ et que $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in E$.
(ii) Montrer que

$$f(x+y+z) = f(x+y) + f(x+z) + f(y+z) - f(x) - f(y) - f(z)$$

pour tous $x, y, z \in E$.

(iii) Montrer que l'application $(x, y) \mapsto f(x+y) - f(x) - f(y)$ est \mathbf{Q} -bilinéaire.

(iv) Soit $x \mapsto \|x\|$ une norme sur E telle que

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \text{pour tous } x, y \in E.$$

Montrer qu'il existe un produit scalaire sur E dont la norme associée est $x \mapsto \|x\|$.

Exercice 2 (Cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz) Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et $x, y \in E$ tels $|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$. Montrer que x et y sont colinéaires.

Exercice 3 (Espace de Hardy) Soit $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ le disque-unité. Soit $\mathcal{H}^2(D)$ l'espace vectoriel complexe des fonctions $f : D \rightarrow \mathbf{C}$ représentables par une série $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ convergente sur D et telles que

$$\sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt < \infty.$$

(i) Montrer que l'application

$$f \mapsto \|f\| := \left(\sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt \right)^{1/2}$$

est une norme sur $\mathcal{H}^2(D)$.

Soit $f \in \mathcal{H}^2(D)$ et soit $(a_n)_n$ telle que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sur D .

(ii) Montrer que, pour tout $0 \leq r < 1$, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

(iii) Montrer que $\|f\| = (\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2)^{1/2}$.

(iv) Montrer que l'application $(f, g) \mapsto \langle f|g \rangle$ définie par

$$\langle f|g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{b}_n$$

pour $f, g \in \mathcal{H}^2(D)$ avec $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ est un produit scalaire sur $\mathcal{H}^2(D)$ tel que $\|f\|^2 = \langle f|f \rangle$.

(v) Montrer que $\mathcal{H}^2(D)$ est un espace de Hilbert.

Exercice 4 (Projection sur une partie complète) Soit E un espace préhilbertien et soit C une partie non vide, convexe et *complète* de E . Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe un unique $y_0 \in C$ tel que

$$\|x - y_0\| = \min\{\|x - y\| : y \in C\}.$$

Exercice 5 (Une caractérisation de la projection sur une partie)

Soient E un espace préhilbertien, C une partie de E et $x \in E$. Soit $y_0 \in C$ tel que

$$\operatorname{Re}\langle x - y_0 | y - y_0 \rangle \leq 0 \quad \text{pour tout } y \in C.$$

Montrer que

$$\|x - y_0\| = \min\{\|x - y\| : y \in C\}.$$

Exercice 6 (Caractère Lipschitzien de la projection sur une partie convexe) Soient \mathcal{H} un espace de Hilbert et C une partie non vide, convexe et fermée de \mathcal{H} . On note $P_C : \mathcal{H} \rightarrow C$ l'application qui à $x \in \mathcal{H}$ associe l'unique $y_0 \in C$ tel que

$$\|x - y_0\| = \min\{\|x - y\| : y \in C\}.$$

Montrer que $\|P_C(x) - P_C(y)\| \leq \|x - y\|$ pour tous $x, y \in \mathcal{H}$.

Exercice 7 (Projection sur un sous-espace de dimension finie) Soient E un espace vectoriel normé, F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $x \in E$. Montrer qu'il existe $y_0 \in F$ tel que

$$\|x - y_0\| = \min\{\|x - y\| : y \in F\}.$$

Montrer, par un exemple, que y_0 n'est pas nécessairement unique.