

Espaces vectoriels normés—Feuille de TD 3

Exercice 1 (Une forme linéaire continue dont la norme n'est pas atteinte) On considère $C_{\mathbf{R}}[0, 1]$, l'espace vectoriel des fonctions continues $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, muni de la norme $f \mapsto \|f\|_{\infty}$. Soit $\varphi : C_{\mathbf{R}}[0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ la forme linéaire définie par

$$\varphi(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} f\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{pour tout } f \in C_{\mathbf{R}}[0, 1].$$

- (i) Montrer que φ est continue.
- (ii) Montrer que $\|\varphi\| = 1$.
- (iii) Montrer qu'il n'existe pas de $f \in C_{\mathbf{R}}[0, 1]$ avec $\|f\|_{\infty} \leq 1$ et tel que $|\varphi(f)| = 1$.

Exercice 2 (Norme d'une forme linéaire sur $\ell^p(n)$)

Soient $p, q \in [1, +\infty[\cup \{+\infty\}$ tels que $1/p + 1/q = 1$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{K}^n$, on pose $\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$. Soit $x \in \mathbf{K}^n$. Montrer que

$$\|x\|_p = \sup\{|\varphi(x, y)| : y \in \mathbf{K}^n, \|y\|_q \leq 1\}.$$

Indication: Soit A l'expression de droite. Pour montrer l'inégalité $A \leq \|x\|_p$, traiter séparément les cas $p = \infty$, $p \in]1, +\infty[$ et $p = 1$.

Exercice 3 (Comparaison de normes ℓ^p sur \mathbf{K}^n)

- (i) Soit $p \in [1, +\infty[\cup \{+\infty\}$. Montrer que la norme de l'application $\text{Id} : (\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_{\infty}) \rightarrow (\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_p)$ est $n^{1/p}$.
- (ii) Soit $p \in [1, +\infty[\cup \{+\infty\}$. Montrer que la norme de l'application $\text{Id} : (\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_p) \rightarrow (\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_1)$ est $n^{1/q}$, où q est tel que $1/p + 1/q = 1$.
- (iii) Soient $p_1, p_2 \in [1, +\infty[\cup \{+\infty\}$ tels que $p_1 < p_2$. Montrer que la norme de l'application $\text{Id} : (\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_{p_2}) \rightarrow (\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_{p_1})$ est $n^{1/p_1 - 1/p_2}$.

Exercice 4 (Comparaison de normes ℓ^p sur \mathbf{K}^n - bis)

Soient $p_1, p_2 \in [1, +\infty[\cup \{+\infty\}$ tels que $p_1 < p_2$.

- (i) Montrer que $\|x\|_{p_2} \leq \|x\|_{p_1}$ pour tout $x \in \mathbf{K}^n$.
- (ii) Montrer que $\ell^{p_1} \subset \ell^{p_2}$ et que $\|x\|_{p_2} \leq \|x\|_{p_1}$ pour tout $x \in \ell^{p_1}$. Peut-on avoir $\ell^{p_2} \subset \ell^{p_1}$?

Exercice 5 (Inclusions entre différents espaces L^p)

Soient $p_1, p_2 \in [1, +\infty[\cup\{+\infty\}$ tels que $p_1 < p_2$.

- (i) Soit (X, \mathcal{B}, μ) un espace de probabilité. Montrer que $L^{p_2}(X, \mathcal{B}, \mu) \subset L^{p_1}(X, \mathcal{B}, \mu)$ et que $\|x\|_{p_1} \leq \|x\|_{p_2}$ pour tout $x \in L^{p_2}$.
- (ii) Soit \mathbf{R} muni de la mesure de Lebesgue. Montrer que l'on a ni $L^{p_2}(\mathbf{R}) \subset L^{p_1}(\mathbf{R})$ ni $L^{p_1}(\mathbf{R}) \subset L^{p_2}(\mathbf{R})$.

Exercice 6 (Un exemple de calcul d'une norme quotient) On note c_0 le sous-espace vectoriel de ℓ^∞ des suites $(x_n)_n$ avec $\lim_n x_n = 0$.

- (i) Montrer que c_0 est fermé dans ℓ^∞ .

Soit $E = \ell^\infty / c_0$ l'espace quotient et $p : \ell^\infty \rightarrow E$ l'application canonique.

- (ii) Montrer que, pour $x = (x_n)_n \in \ell^\infty$, on a

$$\|p(x)\| = \limsup_n |x_n|.$$

Exercice 7 (Séparabilité des espaces ℓ^p) Soient $p_1, p_2 \in [1, +\infty[\cup\{+\infty\}$ tels que $p_1 < p_2$. Soit $p \in [1, +\infty[\cup\{+\infty\}$. On note c le sous-espace vectoriel de ℓ^p des suites $(x_n)_n$ de support fini, c-à-d telles qu'il existe N avec $x_n = 0$ pour tout $n \geq N$.

- (i) Montrer que c est dense dans ℓ^p pour $p \in [1, +\infty[$.
- (ii) On note c_0 le sous-espace vectoriel de ℓ^∞ des suites $(x_n)_n$ avec $\lim_n x_n = 0$. Montrer que l'espace c_0 (introduit dans l'Exercice ??) est l'adhérence de c dans ℓ^∞ .
- (iii) Montrer que ℓ^p est séparable pour $p \in [1, +\infty[$.
- (iv) Montrer que ℓ^∞ n'est pas séparable.