

Espaces vectoriels normés—Feuille de TD 10

Exercice 1 (Somme directe d'espaces vectoriels normés)

Soient $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(F, \|\cdot\|_2)$ deux espaces vectoriels normés. On note $E \oplus F$ l'espace vectoriel somme directe de E et F , c-à-d le produit cartésien $E \times F$ muni des opérations $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ et $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$. On définit une norme sur $E \oplus F$ par $\|(x, y)\|_\infty = \max\{\|x\|_1, \|y\|_2\}$.

Soient $p_1 : E \oplus F \rightarrow E$ et $p_2 : E \oplus F \rightarrow F$ les projections canoniques définies par $p_1(x, y) = x$ et $p_2(x, y) = y$.

- (i) Vérifier que p_1 et p_2 sont continues et que la topologie définie par $\|\cdot\|_\infty$ sur $E \oplus F$ est la topologie-produit de celles de E et F .
- (ii) Montrer que $E \oplus F$ est un espace de Banach si et seulement si E et F sont des espaces de Banach.

Exercice 2 (Une application du théorème du graphe fermé) Soit $(a_n)_n$ une suite de scalaires dans \mathbf{K} . On considère l'application linéaire $T : \ell_{\mathbf{K}}^p(\mathbf{N}) \rightarrow \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ définie par $T((x_n)_n) = (a_n x_n)_n$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:

- (i) L'image de T est contenue dans $\ell_{\mathbf{K}}^p(\mathbf{N})$.
- (ii) La suite $(a_n)_n$ est bornée.
- (iii) L'image de T est contenue dans $\ell_{\mathbf{K}}^p(\mathbf{N})$ et $T : \ell_{\mathbf{K}}^p(\mathbf{N}) \rightarrow \ell_{\mathbf{K}}^p(\mathbf{N})$ est continue.

Exercice 3 (Espace supplémentaire topologique) Soient E un espace de Banach et F un sous-espace vectoriel fermé de E . On suppose que F admet un sous-espace supplémentaire topologique, c-à-d qu'il existe un sous-espace vectoriel fermé G de E tel que $E = F \oplus G$ et $F \cap G = \{0\}$. Montrer que la bijection linéaire

$$T : F \oplus G \rightarrow E, (x, y) \mapsto x + y$$

est un homéomorphisme, où $F \oplus G$ est muni de la norme comme dans l'Exercice 1.

Exercice 4 (Une application du Théorème de Banach-Steinhaus) Soit $(a_n)_n$ une suite de scalaires dans \mathbf{K} telle que la série de terme générale $a_n x_n$ soit convergente pour toute suite $(x_n)_n \in \ell^1$. Montrer que $(a_n)_n \in \ell^\infty$.

Indication: Considérer, pour tout $N \in \mathbf{N}$, la forme linéaire $\varphi_N : \ell^1 \rightarrow \mathbf{K}$ définie par $\varphi_N((x_n)_n) = \sum_{n=0}^N a_n x_n$. Utiliser le Théorème de Banach-Steinhaus et l'Exercice 4 de TD 5

Exercice 5 (Formules de quadrature) Soit $[a, b]$ un intervalle de \mathbf{R} . Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on fixe une suite de nombres réels $\alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_n^{(n)}$ ainsi qu'une partition $a \leq t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} \leq b$ de $[a, b]$. On définit alors une "formule de quadrature"

$$Q_n : C[a, b] \rightarrow \mathbf{R}, \quad f \mapsto \sum_{k=0}^n \alpha_k^{(n)} f(t_k^{(n)}).$$

On suppose que $(Q_n(P))_n$ converge vers $\int_a^b P(x)dx$ pour tout polynôme P .

(i) Montrer que $(Q_n(f))_n$ converge vers $\int_a^b f(x)dx$ pour tout $f \in C[a, b]$ si et seulement si $\sup_{n \in \mathbf{N}} \sum_{k=0}^n |\alpha_k^{(n)}| < \infty$.

Indication: Pour montrer que la condition est suffisante, utiliser le Théorème de Weierstraß. Pour montrer que la condition est nécessaire, utiliser le Théorème de Banach-Steinhaus.

(ii) On suppose que $\alpha_k^{(n)} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $0 \leq k \leq n$. Montrer que $(Q_n(f))_n$ converge vers $\int_a^b f(x)dx$ pour tout $f \in C[a, b]$

Exercice 6 (Réalité du spectre d'un opérateur auto-adjoint) Soient E un espace de Banach et $T \in \mathcal{B}(E)$.

(i) Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes

- T est injectif et son image $T(E)$ est fermée;
- il existe $C > 0$ tel que $\|Tx\| \geq C\|x\|$ pour tout $x \in E$.

On suppose à partir de maintenant que E est un espace de Hilbert.

(ii) Soit $T \in \mathcal{B}(E)$ tel qu'il existe $C > 0$ avec $\|Tx\| \geq C\|x\|$ et $\|T^*x\| \geq C\|x\|$ pour tout $x \in E$. Montrer que T et T^* sont inversibles.

(iii) Soit $T \in \mathcal{B}(E)$ auto-adjoint et soit $\lambda \in \mathbf{C}$. Montrer que, pour tout $x \in E$ avec $\|x\| = 1$, on a

$$\|(T - \lambda I)x\| \geq |\langle (T - \lambda I)x | x \rangle| \geq |\operatorname{Im}(\lambda)|.$$

(iv) Soit $T \in \mathcal{B}(E)$ auto-adjoint et soit $\lambda \in \mathbf{C}$ appartenant au spectre $\sigma(T)$ de T (voir Exercice 5 du TD 8). Montrer que $\lambda \in \mathbf{R}$.