Université de Rennes 1– 2015/2016

L3–Suites et séries de fonctions–Feuille de TD 9

Exercice 1. (Etude d'une série trigonométrique) On considère la série trigonométrique $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\cos(nx)}{(2n+2)^4}$.
(i) Montrer que cette série est uniformément convergente sur $\mathbf{R}$.
(ii) Montrer que la somme $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de cette série est deux fois continûment dérivable sur $\mathbf{R}$ et calculer ses dérivées f' et f" sous forme de série trigonométrique.
(iii) Déterminer une primitive de f sous forme de série trigonométrique.

Exercice 2. (Etude d'une série trigonométrique)
On considère la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbf{Z}^*} \dfrac{2+3i}{|n|^{1/4}} e^{inx}$.
(i) Ecrire cette série trigonométrique sous la forme $a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n \cos nx + b_n \sin nx$.
(ii) Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de cette série trigonométrique.

Exercice 3. (Etude d'une série trigonométrique) On fixe un nombre réel $r \in [0, 1[$ et on considère la série trigonométrique $1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{inx}$.
(i) Montrer que cette série est uniformément convergente sur $\mathbf{R}$ et déterminer sa somme $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$
(ii) Déduire de (i) une expression simple pour les sommes des séries

$$1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(nx) \qquad \text{et} \qquad 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \sin(nx).$$

Exercice 4. (Séries trigonométriques solutions d'une équation différentielle)
On considère une série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{inx}$ telle que les séries de terme général $n^2|c_n|$ et $n^2|c_{-n}|$ convergent.
(i) Montrer que $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{inx}$ converge uniformément sur $\mathbf{R}$.
(ii) Montrer que la somme $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ de cette série est deux fois continûment dérivable.
On suppose que f est solution de l'équation différentielle (E) suivante : $y''+e^{ix}y = 0$.
(iii) Montrer que $c_n = 0$ pour tout $n < 0$ et que $c_n = c_0/(n!)^2$ pour tout $n \geq 1$.
(iv) Vérifier que la somme f de la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbf{N}} e^{inx}/(n!)^2$ est bien deux fois continûment dérivable et qu'elle est solution de l'équation différentielle (E).

Exercice 5. (*) Soient $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(c_{-n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ deux suites de nombres complexes ; on suppose qu'il existe $\lambda > 0$ et $C > 0$ tels que, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on a $|c_n| \leq Ce^{-\lambda n}$ et $|c_{-n}| \leq Ce^{-\lambda n}$.
(i) Montrer que la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{inx}$ converge uniformément sur $\mathbf{R}$ vers une fonction indéfiniment dérivable $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$.
(ii) Montrer que f est développable en une série entière $\sum_{k\geq 0} a_k x^k$ qui est convergente pour $|x| < \lambda$. *Indication :* Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, la série numérique de terme général $(in)^k c_n + (-in)^k c_{-n}$ est convergente ; en notant A_k sa somme, poser $a_k = \frac{A_k}{k!}$ et montrer que $\sum_{k\geq 0} a_k x^k$ converge vers $f(x)$ pour tout $|x| < \lambda$.