Université de Rennes 1– 2015/2016

L3–Suites et séries de fonctions–Feuille de TD 8

Exercice 1. **(Polynômes en $\cos x$ et $\sin x$)** Ecrire les expressions $f(x)$ suivantes comme polynômes en $\cos x$ et $\sin x$:
(i) $f(x) = \cos 3x$; (ii) $f(x) = \sin 3x$;
(iii) $f(x) = \cos 5x$; (iv) $f(x) = \sin 5x$.

Exercice 2. **(Linéarisation de puissances de fonctions trigonométriques)** Ecrire les expressions $f(x)$ suivantes comme combinaisons linéaires de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$:
(i) $f(x) = \cos^3 x$; (ii) $f(x) = \sin^3 x$;
(iii) $f(x) = \cos^2 x \sin^3 x$; (iv) $f(x) = \cos^3 x \sin^2 x$.

Exercice 3. **(Deux sommes trigonométriques)** Soit $z \in \mathbf{C} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kz) = \frac{\cos(nz/2)\sin((n+1)z/2)}{\sin(z/2)}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(kz) = \frac{\sin(nz/2)\sin((n+1)z/2)}{\sin(z/2)}$$

Exercice 4. **(Intégrales de fonctions trigonométriques)** Pour $n, m \in \mathbf{N}$, calculer les intégrales suivantes :

(1) $\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx$;

(2) $\int_0^{2\pi} \cos(nx)\sin(mx)dx$;

(3) $\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx$.

Exercice 5. **(Une application du Théorème d'Abel)**

On considère la série entière $\sum_n \dfrac{i^n}{n} x^n$ de la variable réelle x; soit R son rayon de convergence et $f :]-R, R[\mapsto \mathbf{C}$ sa somme.
(i) Calculer R.
(ii) Calculer $f'(x)$ et en déduire une expression de $f(x)$ en termes des fonctions usuelles pour tout $x \in]0, R[$.
(iii) Que peut-on en déduire pour $\lim_{x\to 1-} f(x)$?
(iv) Calculer les valeurs des séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$

Exercice 6. **(*)** Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $f : D_R \to \mathbf{C}$. Soit $r \in]0, R[$.
(i) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}dt$. *Indication :* Dans l'expression $\int_0^{2\pi} (\sum_k a_k r^k e^{ikt})e^{-int}dt$, procéder à une interversion de la somme et l'intégrale, en la justifiant.
(ii) Soit $m_r = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $|a_n| \leq \dfrac{m_r}{r^n}$.
(iii) On suppose que $R = +\infty$ est que f est bornée sur $D_R = \mathbf{C}$. Montrer que f est constante ("Théorème de Liouville").