Université de Rennes 1– 2015/2016

L3–Suites et séries de fonctions–Feuille de TD 7

Exercice 1 (Solution d'une équation différentielle)
(i) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $u_{2n} = 3^{2n}$ et $u_{2n+1} = \sin(2n+1)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Calculer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.
Pour tout $x \in]-R, R]$, on note $f(x)$ la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ du point (i).
(ii) Soit y la somme d'une autre série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $r > 0$. Soit $R' = \min\{r, R\}$. On suppose que y est solution sur $]-R', R'[$ de l'équation différentielle $(E) : x^2y''(x) + 5xy'(x) + 4y(x) = f(x)$.

Déterminer a_n pour tout $n \in \mathbf{N}$ ainsi que le rayon de convergence r de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

(iii) Montrer que la somme y de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, avec les a_n obtenus en (ii), est bien deux fois dérivable sur $]-r, r[$ et satisfait à l'équation différentielle (E) sur $]-r, r[$.

Exercice 2 (Solution d'une équation différentielle) On considère l'équation différentielle $y'(x) - 2xy(x) = 0$. Trouver toutes les solutions de cette équation qui sont somme d'une série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

Exercice 3 (Solution d'une équation différentielle) On considère l'équation différentielle $(E) : y''(x) + 2xy'(x) + 2y(x) = 0$.
(i)Trouver toutes les solutions $y = y(x)$ de l'équation (E) qui sont somme d'une série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.
(ii) Montrer qu'il existe une unique solution $y = y(x)$ de l'équation (E) qui soit développable en série entière avec $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$. Déterminer son rayon de convergence et sa somme.

Exercice 4 (*) Soient $a > 0$ et $f :]-a, a[\to \mathbf{R}$ une fonction indéfiniment dérivable. On dit que f est *absolument monotone* si $f^{(n)}(x) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $x \in]-a, a[$ (avec la convention habituelle, $f^{(0)} = f$).
(i) Donner des exemples de fonctions absolument monotones.

Soit $f :]-a, a[\to \mathbf{R}$ une fonction absolument monotone.

(ii) Soit $0 \leq r < a$. Montrer que la série de Taylor $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}}{n!}(0) r^n$ converge et est majorée par $f(r)$.
(iii) Déduire de (ii) que f est développable en une série entière, avec un rayon de convergence $R \geq a$. *Indication :* Soit $x \in]-a, a[$; prenrde $0 \leq r < a$ tel que $|x| \leq r$ et majorer le reste dans la formule de Taylor-Maclaurin.