Université de Rennes 1– 2015/2016

L3–Suites et séries de fonctions–Feuille de TD 6

Exercice 1 (Développement en série entière) Déterminer le développement de la fonction d'une variable réelle f, définie par $f(x) = \dfrac{1}{3x-1} + \dfrac{1}{x^2-2} + \dfrac{1}{x^3+3}$, en série entière autour de 0, en précisant le rayon de convergence de cette série.

Exercice 2 (Développement en série entière) On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ et $g(x) = \dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}$.
(i) Déterminer le développement de f'' en série entière autour de 0, en précisant son rayon de convergence.
(ii) Déterminer le développement de g en série entière autour de 0, en précisant son rayon de convergence.

Exercice 3 (Développement en série entière) On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{(2-x)(1-x^2)}$
(i) Décomposer en éléments simples.
(ii) Déterminer le développement de f en série entière a autour de 0.

Exercice 4 (Développement en série entière) On considère la fonction f définie par $f(x) = \log(3x^2 - 5x + 2)$. Quel est le domaine de définition E de f? Déterminer d'abord le développement de f' en série entière autour de 0 et en déduire celui de f, en précisant son rayon de convergence.

Exercice 5 (*) Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on note p_n le nombre de triplets $(k, l, m) \in \mathbf{N}^2$ qui sont solutions de l'équation $k + 2l + 3m = n$.
(i) Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = \dfrac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)}$, pour tout $z \in \mathbf{C}$ avec $|z| < 1$.
(ii) En déduire p_n et vérifier que $p_n \sim \dfrac{n^2}{12}$ quand $n \to +\infty$. *Indication :* décomposer $\frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)}$ en éléments simples.
(iii) **(**)** Soient $a_1, \ldots, a_m$ des nombres entiers ≥ 1 et premiers entre eux. Généraliser ce qui précède en montrant que le nombre p_n de m-tuplets $(k_1, \ldots, k_m) \in \mathbf{N}^m$ qui sont solutions de l'équation $a_1 k + \cdots + a_m k_m = n$ est équivalent à $\dfrac{n^{m-1}}{(m-1)!a_1 \cdots a_m}$. *Indication :* décomposer $F(z) = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{(1-z^{a_i})}$ en éléments simples et observer que 1 est l'unique pôle d'ordre maximal m de F.