Université de Rennes 1– 2015/2016

L3–Suites et séries de fonctions–Feuille de TD 5

Exercice 1. (Rayon de convergence de séries entières) Déterminer pour les séries entières suivantes $\sum_n a_n x^n$ d'une variable réelle x leur rayon de convergence R et étudier la nature de la série aux points $x = R$ et $x = -R$. (Rappelons que $E(x)$ désigne la partie entière de $x \in \mathbf{R}$.)

(i) $a_n = \dfrac{(-1)^n \log n}{\sqrt{n}}$ (ii) $a_n = \cosh(n^2)$

(iii) $a_n = 2^n + (-1)^n 2^n + \dfrac{1}{n}$ (iv) $a_n = \sin(\dfrac{1}{n^2}) + \dfrac{1}{n}$

(v) $a_n = \dfrac{5^n e^{in^2}}{3^n}$ (vi) $a_n = E(\sqrt{2^n + 1})$.

Exercice 2. (Etude d'une série entière) On considère la série entière $\sum_{n\geq 1} \tan(\frac{1}{n}) x^n$ de la variable réelle x, de rayon de convergence R et de somme $S :]-R, R[\to \mathbf{R}$.
(i) Déterminer R et étudier la nature de la série aux points $x = R$ et $x = -R$.
(ii) Determiner les séries entières $\sum_n b_n x^n$ et $\sum_n c_n x^n$ qui représentent autour de 0 la dérivée S' et la primitive F de S avec $F(0) = 0$. Déterminer l'ensemble de *tous* les $x \in \mathbf{R}$ pour lesquels chacune de ces séries converge.

Exercice 3. (Développement en série entière d'une fonction)
(i) Déterminer le développement en série entière autour de 0 de la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^4}$, en précisant son rayon de convergence.

Soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $g(x) = \arctan\left(\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)$.

(ii) Calculer la dérivée g' de g et en déduire le développement de g en série entière autour de 0, en précisant son rayon de convergence R.

Exercice 4. (*) Pour $n \in \mathbf{N}$, soit $u_n : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ définie par $u_n(x) = e^{-n} e^{in^2 x}$.
(i) Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, la série de terme général $u_n^{(k)}$ (k-ième dérivée) est normalement convergente sur $\mathbf{R}$.
Soit $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C}$ la somme de la série de terme général u_n.
(ii) Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$ et calculer $f^{(k)}$ sous forme de série convergente, pour tout $k \in \mathbf{N}$.
(iii) Soit $x > 0$. Montrer que la série de terme général $\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} x^k$ n'est pas convergente.
(iv) En déduire que que rayon de convergence de la série de Taylor $\sum_k \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ de f est $R = 0$.