Université de Rennes 1– 2015/2016

L3–Suites et séries de fonctions–Feuille de TD 4

Exercice 1. (Rayon de convergence de séries entières) Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_n a_n z^n$ de la variable complexe z pour les suites $(a_n)_n$ suivantes :

(i) $a_n = \log(n)^n$	(ii) $a_n = \dfrac{n}{2^n}$
(iii) $a_n = n^2 + n + 1$	(iv) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$
(v) $a_n = \sin(1/n^2)$	(vi) $a_n = 3^{(-1)^n n}$
(vii) $a_n = \dfrac{i^n n^2}{n^2+1}$	(viii) $a_n = \left(\dfrac{3+4i}{1+i}\right)^n$

Exercice 2. (Rayon de convergence de séries entières) Déterminer le rayon de convergence R des séries entières $\sum_n a_n x^n$ de la variable réelle x pour les suites $(a_n)_n$ suivantes et étudier la nature de la série aux points $x = R$ et $x = -R$:

(i) $a_n = \log\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}})\right)$	(ii) $a_n = \sin\left(\dfrac{2\pi n}{5}\right)$
(iii) $a_n = 1 - \cos(1/n^2)$	(iv) $a_n = ne^{-\sqrt{n}}$

Exercice 3. (Rayon de convergence de séries entières) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_n a_n z^n$ et étudier la nature de la série aux points $z \in \mathbf{C}$ avec $|z| = R$ pour les suites $(a_n)_n$ suivantes :
(i) $a_n = 1$ si n est un nombre premier et $a_n = 0$ sinon ;
(ii) a_n est le nombre de diviseurs positifs de n.

Exercice 4. (Rayon de convergence d'une combinaison linéaire de séries entières) Soient $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières, de rayons de convergence respectifs R_1 et R_2 avec $R_1 \neq R_2$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^*$. Montrer que le rayon de convergence de la série $\sum_n (\alpha a_n + \beta b_n) z^n$ est $R = \min\{R_1, R_2\}$.

Exercice 5. (*) (i) Soit $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$ fixé. Déterminer le rayon de convergence R des séries $\sum_n \dfrac{\cos(n\alpha)}{n} z^n$ et $\sum_n \dfrac{\sin(n\alpha)}{n} z^n$.
(ii) Pour $\alpha \in \mathbf{R}\setminus\pi\mathbf{Z}$ et $x \in]-R, R[$, calculer les sommes des séries $\sum_n \dfrac{\cos(n\alpha)}{n} x^n$ et $\sum_n \dfrac{\sin(n\alpha)}{n} x^n$. Indication : soit $S(x)$ la somme de la série entière $\sum_n \frac{e^{i\alpha n}}{n} x^n$; calculer $S'(x)$.