Université de Rennes 1– 2015/2016

L3–Suites et séries de fonctions–Feuille de TD 3

Exercice 1. (Etude de la convergence de séries) Déterminer l'ensemble de convergence E' de la série de terme général $u_n : E \to \mathbf{R}$ et étudier sa convergence uniforme ou normale sur E' :

(i) $E = \mathbf{R}$, $u_n(x) = 5^n x^n$

(ii) $E = \mathbf{R}$, $u_n(x) = \dfrac{x^4}{(x^4+1)^n}$

(iii) $E = \mathbf{R}$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n^5} x^n$

(iv) $E = \mathbf{R}_+^*$, $u_n(x) = \dfrac{\sin(n)}{n^n}(\log(x))^n$

(v) $E = \mathbf{R}$, $u_n(x) = \dfrac{\arctan(nx)}{n^{3/2}}$

(vi) $E = \mathbf{R}$, $u_n(x) = \dfrac{(\log(n))^3}{n^2} x^n$

Exercice 2. (Etude d'une série de fonctions) On considère la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général $u_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ défini par $u_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

(i) Montrer que la série de terme général u_n converge simplement sur $]-1,1[$ et uniformément sur $[-a,a]$ pour tout $0 < a < 1$. On note $s : x \mapsto s(x)$ la somme de cette série.

(ii) Montrer que s est deux fois continument dérivable.

(iii) En considérant la série des dérivées secondes $\sum_n u_n''$, déterminer s.

Exercice 3. (Primitives et dérivées de séries) (i) Pour $n \geq 1$, soit $u_n : [0,2\pi] \to \mathbf{R}$ définie par $u_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^3}$. Calculer la primitive F sur $[0,2\pi]$ avec $F(0) = 0$ de la série de terme général u_n.

(ii) Pour $n \geq 1$, soit $u_n : [0,2\pi] \to \mathbf{R}$ définie par $u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^5}$. Calculer la dérivée de la série de terme général u_n sur $[0,2\pi]$.

(iii) Pour $n \in \mathbf{N}$, soit $u_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $u_n(x) = \frac{x^n}{n!}$. Calculer la primitive F sur $\mathbf{R}$ avec $F(0) = 1$ de la série de terme général u_n.

(iv) Pour $n \in \mathbf{N}$, soit $u_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$. Calculer la dérivée de la série de terme général u_n sur $\mathbf{R}$.

Exercice 4. (Intégrale d'une limite de fonctions sur un intervalle non borné) On définit pour tout $n \geq 1$, $f_n : [1,+\infty[\to \mathbf{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } x \in [n^2, (n+1)^2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(i) Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[1,+\infty[$ vers une fonction f qu'on explicitera.

(ii) Comparer $\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} f_n(x)dx$ et $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

Exercice 5. (*) Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante de nombres réels positifs. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on définit $u_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ par $u_n(x) = a_n x^n (1-x)$.

(i) Montrer que la série de fonctions de terme général u_n converge simplement sur $[0,1]$.

(iii) Montrer que la série de terme général u_n converge normalement sur $[0,1]$ si et seulement si la série numérique de terme général a_n/n converge. Indication : trouver un équivalent de $\sup_{x\in[0,1]} |u_n(x)|$.

(iii) Montrer que la série de terme général u_n converge uniformément sur $[0,1]$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.