Université de Rennes 1– 2015/2016

L3–Suites et séries de fonctions–Feuille de TD 2

Exercice 1 (Convergence simple et convergence uniforme) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = \dfrac{x}{nx^2+1}$.
(i) Déterminer l'ensemble de convergence $E \subset \mathbf{R}$ de la suite de fonctions f_n ainsi que sa limite $f : E \to \mathbf{R}$.
(ii) Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé. Déterminer $\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|$.
(iii) La suite de fonctions f_n converge-t-elle uniformément vers f sur E?

Exercice 2 (Convergence simple et convergence uniforme) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = n(x^n - x^{n+1})$.
(i) Déterminer l'ensemble de convergence $E \subset [0,1]$ de la suite de fonctions f_n ainsi que sa limite $f : E \to \mathbf{R}$.
(ii) Montrer que la suite de fonctions f_n ne converge pas uniformément vers f sur E.
(iii) Soit $a \in]0,1[$. Montrer que la suite de fonctions f_n converge uniformément vers f sur $[0,a]$.

Exercice 3 (Intégrales de limites) Calculer la limite $\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)dx$ et la comparer avec l'intégrale $\int_E f(x)dx$ de la limite f pour les fonctions f_n de l'Exercice 6 de la feuille de TD 1 sur leur ensemble de convergence E.

Exercice 4 (Convergence d'une série de fonctions) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit $u_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $u_n(x) = e^{-nx}$.
(i) Déterminer l'ensemble de convergence E de la série de fonctions de terme général u_n et calculer, pour tout $x \in E$, la somme $S(x)$ de la série $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$.
(ii) La série de terme terme général u_n converge-t-elle uniformément sur E?
(iii) Soit $a > 0$. Montrer que la série de terme général u_n converge normalement sur $[a, +\infty]$.

Exercice 5 (*) Soit $(f_n)_n$ la suite de fonction définie sur $[0,1]$, par récurrence, par $f_0(x) = x$ et $f_{n+1} = 2f_n(1-f_n)$ pour $n \geq 0$.
(i) Montrer que $(f_n)_n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f qu'on déterminera.
(ii) Soit $n \in \mathbf{N}$. Donner une expression simple pour $\dfrac{1}{2} - f_n$ et retrouver le résultat (i).
(iii) Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout intervalle fermé I contenu dans $]0,1[$. La convergence est-elle uniforme sur $[0,1]$?