**Université de Rennes 1– 2015/2016**

**L3–Suites et séries de fonctions–Feuille de TD 11**

**Exercice 1. (Détermination d'une série de Fourier)** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction $2\pi$-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } x \in [-\pi, 0] \\ x \text{ si } x \in [0, \pi[. \end{cases}$$

Calculer la série de Fourier $S_\infty(f)$ de $f$, déterminer son domaine de convergence et étudier sa convergence.

**Exercice 2. (Détermination d'une série de Fourier)** Pour $0 < a < \pi$, soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction $2\pi$-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} \ \text{ si } x \in [-a, a] \\ 0 \text{ si } x \in [-\pi, -a[\cup]a, \pi]. \end{cases}$$

Calculer la série de Fourier $S_\infty(f)$ de $f$, déterminer son domaine de convergence et étudier sa convergence.

**Exercice 3. (Détermination d'une série de Fourier))** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction $2\pi$-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \pi x \qquad \text{si} \qquad x \in [-\pi, 0] \\ -x^2 + \pi x \qquad \text{si} \qquad x \in ]0, \pi[. \end{cases}$$

Déterminer la série de Fourier $S_\infty(f)$ de $f$ sous la forme $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ ainsi que sous la forme $\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{inx}$; déterminer son domaine de convergence et étudier sa convergence.

**Exercice 4. (Détermination d'une série de Fourier)** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction $2\pi$-périodique définie par

$$f(x) = |x| + \sin(2x)\sin(3x) \qquad \text{pour tout} \quad x \in [-\pi, \pi[.$$

Calculer la série de Fourier $S_\infty(f)$ de $f$, déterminer son domaine de convergence et étudier sa convergence.

**Exercice 5. (*)** On fixe $y \in \mathbf{R}$ avec $y > 0$. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction $2\pi$-périodique définie par

$$f(x) = e^{xy} \qquad \text{pour tout} \quad x \in [-\pi, \pi[.$$

(i) Montrer que la série de Fourier $S_\infty(f)$ de $f$ converge sur $\mathbf{R}$ et identifier sa somme.
(ii) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + y^2} = \frac{1}{2y}\left(\frac{\pi \cosh(\pi y)}{\sinh(\pi y)} - \frac{1}{y}\right).$$

(iii) Déduire de (i), de manière convenablement justifiée, la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.