Université de Rennes 1– 2015/2016

L3–Suites et séries de fonctions–Feuille de TD 10

Exercice 1. (Détermination d'une série de Fourier) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = x + \cos(2x) \qquad \text{pour tout} \quad x \in [0, 2\pi[.$$

Calculer la série de Fourier $S_\infty(f)$ de f, déterminer son domaine de convergence et étudier sa convergence.

Exercice 2. (Détermination d'une série de Fourier) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = x^2 + \cos^2(x) \qquad \text{pour tout} \quad x \in [-\pi, \pi[.$$

Calculer la série de Fourier $S_\infty(f)$ de f, déterminer son domaine de convergence et étudier sa convergence.

Exercice 3. (Détermination d'une série de Fourier)) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = \sinh(x) \qquad \text{pour tout} \quad x \in [0, 2\pi[.$$

Calculer la série de Fourier $S_\infty(f)$ de f, déterminer son domaine de convergence et étudier sa convergence.

Exercice 4. (Détermination d'une série de Fourier) Soit $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = \cos(\alpha x) \qquad \text{pour tout} \quad x \in [0, 2\pi[.$$

Calculer la série de Fourier $S_\infty(f)$ de f, déterminer son domaine de convergence et étudier sa convergence.

Exercice 5. (Un calcul de sommes de séries numériques) Soient $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction paire et 2π-périodique et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction impaire et 2π-périodique qui coïncident avec la fonction $x \mapsto x(\pi - x)$ sur $[0, \pi]$.
(i) Calculer les séries de Fourier de f et g, déterminer leur domaine de convergence et étudier leur convergence.
(ii) Calculer les sommes des séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Exercice 6. (*) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction 2π-périodique. On suppose que f est hölderienne d'exposant α pour un nombre réel $\alpha \in]0, 1]$, c-à-d qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$ pour tous $x, y \in \mathbf{R}$.
(i) Montrer qu'il existe une constante M telle que $|c_n(f)| \leq \dfrac{M}{|n|^\alpha}$ pour tout $n \in \mathbf{Z}^*$, où les $c_n(f)$ sont les coefficients de Fourier de f *Indication :* Pour une suite convenable a_n, calculer les coefficients de Fourier de la fonction $x \mapsto f(x) - f(x + a_n)$.
(ii) On suppose que f est dérivable et que sa dérivée f' est hölderienne d'exposant $\alpha \in]0, 1]$. Montrer que la série de Fourier $S_\infty(f)$ de f converge uniformément vers f sur $\mathbf{R}$.