Université de Rennes 1–Année 2015/2016

L3–Suites et séries de fonctions–Feuille de TD 1

Exercice 1. (Rappel : Terme général d'une série convergente)

Soit $(u_n)_{n\imath\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes.

(i) On suppose que la série de terme général u_n est convergente. Montrer que $\lim_n u_n = 0$. Indication: on observera que $u_n = S_n - S_{n-1}$, où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est la n-ième somme partielle de la série.

(ii) Donner des exemples de suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ avec $\lim_n u_n = 0$ telles la série de terme général u_n n'est pas convergente.

Exercice 2. (Rappel : Critère de Leibniz) Soit (v_n) une suite décroissante de nombres réels positifs. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$. On veut montrer que la série (dite alternée) de terme général $u_n := (-1)^n v_n$ est convergente.

Soit S_n la n-ième somme partielle de la série de terme général u_n.

(i) Montrer que la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.

(ii) Montrer que la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.

(iii) Montrer que les suites $(S_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(S_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ sont convergentes; notons S et S' leurs limites respectives.

(iv) Montrer que $S = S'$.

(v) Conclure.

Exercice 3. (Etude de la convergence de quelques séries) Etudier la convergence des séries suivantes de terme général u_n:

(i)	$u_n = (-1)^n$	(ii)	$u_n = \cos(1/n)$
(iii)	$u_n = \dfrac{1}{2^n}$	(iv)	$u_n = q^n \quad (q \in \mathbf{R})$
(v)	$u_n = \dfrac{1}{n}$	(vi)	$u_n = \dfrac{1}{n^2}$
(vii)	$u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$	(viiii)	$u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{3/2}}$
(ix)	$u_n = \sin(1/n)$	(x)	$u_n = \dfrac{1}{\log n}$

Exercice 4. (Etude de la convergence de quelques séries) Etudier la convergence des séries suivantes de terme général u_n :

(i)	$u_n = n\sin(1/n)$	(ii)	$u_n = (1/3)^{\sqrt{n}}$
(iii)	$u_n = \dfrac{1}{n}\log\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$	(iv)	$u_n = 1 - \cos(1/n)$
(v)	$u_n = ne^{-\sqrt{n}}$	(vi)	$u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
(vii)	$u_n = (-1)^n\left(e - (1 + \dfrac{1}{n})^n\right)$	(viii)	$u_n = \sin\sqrt{1 + n^2\pi^2}$

Exercice 5. (Limite supérieure et limite inférieure d'une suite) On rappelle que la limite supérieure $\overline{\lim}\, u_n$ et la limite inférieure $\underline{\lim}\, u_n$ d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels sont les éléments dans $\mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ définis par:

$$\overline{\lim} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sup\{u_k | k \geq n\}, \qquad \underline{\lim} u_n = \lim_{n\to+\infty} \inf\{u_k | k \geq n\}.$$

(i) Montrer que $\overline{\lim} u_n \in \mathbf{R}$ et $\underline{\lim} u_n \in \mathbf{R}$ si $(u_n)_n$ est bornée (c-à-d minorée et majorée).
(ii) Déterminer $\underline{\lim}(-1)^n$ et $\overline{\lim}(-1)^n$.
(iii) Déterminer $\underline{\lim}(-1)^n 1/n$ et $\overline{\lim}(-1)^n 1/n$.
(iv) Déterminer $\underline{\lim}\cos(2n\pi/3)$ et $\overline{\lim}\cos(2n\pi/3)$.
(v) Déterminer $\underline{\lim}(-1)^n n$ et $\overline{\lim}(-1)^n n$.
(vi) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée de nombres réels. Montrer que $\underline{\lim} u_n = \overline{\lim} u_n$ si et seulement si $(u_n)_n$ est convergente et que, dans ce cas, $\underline{\lim} u_n = \overline{\lim} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_n$.
(vii) Déterminer $\underline{\lim}\, n^{1/n}$ et $\overline{\lim}\, n^{1/n}$.
(viii) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée de nombres réels. Montrer que $\overline{\lim} u_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de $(u_n)_n$ et $\underline{\lim} u_n$ sa plus petite valeur d'adhérence.

Exercice 6. (Etude de la convergence de suites de fonctions) Déterminer l'ensemble de convergence E et étudier la convergence simple et uniforme sur E de la suite des fonctions suivantes f_n défines sur $[0,1]$ pour (i)-(iv) et $[0,+\infty[$ pour (v)-(viii):

$$\text{(i)} f_n(x) = \begin{cases} 1/n & \text{si } x \in [0,1/n] \\ 0 & \text{si } x \in]1/n,1] \end{cases} \qquad \text{(v)} \quad f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in [0,n] \\ -n^2x + n^3 + n & \text{si } n \leq x \leq n + \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } x \geq n + \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$\text{(ii)} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1/n] \\ 0 & \text{si } x \in]1/n,1] \end{cases} \qquad \text{(vi)} \quad f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq n - \frac{1}{n} \\ nx - n^2 + 1 & \text{si } n - \frac{1}{n} \leq x \leq n \\ -nx + n^2 + 1 & \text{si } n \leq x \leq n + \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } x \geq n + \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$\text{(iii)} f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in [0,1/n] \\ 0 & \text{si } x \in]1/n,1] \end{cases} \qquad \text{(vii)} \quad f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq n - \frac{1}{n} \\ x - n + \frac{1}{n} & \text{si } n - \frac{1}{n} \leq x \leq n \\ -x + n + \frac{1}{n} & \text{si } n \leq x \leq n + \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } x \geq n + \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$\text{(iv)} f_n(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1/n] \\ 1/n & \text{si } x \in]1/n,1] \end{cases} \qquad \text{(viii)} \quad f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq n - \frac{1}{n} \\ n^2x - n^3 + n & \text{si } n - \frac{1}{n} \leq x \leq n \\ -n^2x + n^3 + n & \text{si } n \leq x \leq n + \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } x \geq n + \frac{1}{n} \end{cases}$$