Suites et séries de fonctions

Bachir Bekka, Cours L3 Rennes 2015/2016

13 décembre 2015

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Les suites $(u_n)_n$ et séries numériques $\sum u_n$ ont été étudiées dans des cours précédents. Les u_n sont des nombres réels ou complexes et une des questions est de savoir si la limite $\lim_n u_n$ existe ou si la série $\sum u_n$ converge. Supposons maintenant que nous ayons, pour chaque valeur d'un "paramètre" réel ou complexe z appartenant un sous-ensemble E de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, une suite $(u_n(z))_n$ ou série numérique $\sum u_n(z)$. On dispose ainsi d'une suite de fonctions u_n : $z \mapsto u_n(z)$ définies sur E. Soit E' l'ensemble des $z \in E$ pour lesquels $(u_n(z))_n$ ou $\sum u_n(z)$ converge et notons $f(z)$ la limite correspondante. On obtient ainsi une fonction f sur E' à valeurs réelles ou complexes. L'objet de ce cours est de répondre d'abord à la question suivante :

Question 1 Supposons que les u_n possèdent des propriétés de régularité (continuité, dérivabilité, intégrabilité, ...) ; ces propriétés sont-elles héritées par f, c-à-d "passent-elles" à la limite ? Dans le cas où la réponse est positive, on aimerait également exprimer la dérivée ou l'intégrale de f en fonction de celles des u_n.

On peut se demander également quelles fonctions f apparaissent comme limites lorsque les u_n sont des fonctions d'un type particulièrement simples. Cette question se formule de manière plus précise ainsi.

Question 2 On se donne une suite $(u_n)_n$ de fonctions d'un type particulièrement simple ; par exemple, les u_n peuvent être les monômes $z \mapsto z^n$ pour $z \in \mathbf{C}$ ou les fonctions du type $t \mapsto e^{int}$ de la variable réelle $t \in \mathbf{R}$. Soit $f : z \mapsto u(z)$ une fonction "arbitraire". Peut-on trouver une suite de nombres a_n dans $\mathbf{C}$ telles que $f(z) = \sum_n a_n u_n(z)$? C'est la question de la possibilité d'un "développement" de f d'un type particulier selon la suite $(u_n)_n$. Il s'agira de dire quelles fonctions f admettent un tel développement et de préciser la convergence de $\sum_n a_n u_n(z)$ vers $f(z)$ en fonction de z (convergence simple, convergence uniforme, ...). Pour les exemples évoqués précedemment, on parlera d'un développement en série entiére $f(z) = \sum_n a_n z^n$ de la fonction f d'une variable réelle ou complexe z et d'un développement en série trigonométrique $f(t) = \sum_n a_n e^{int}$ de la fonction f d'une variable réelle t.

Chapitre 2

Suites et séries de fonctions

Dans tout le cours, les fonctions que nous considèrerons seront définies sur une partie de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
Notation importante : Le symbole $\mathbf{K}$ désignera toujours indifféremment le corps $\mathbf{R}$ ou le $\mathbf{C}$, muni de sa valeur absolue habituelle.

2.1 Convergence simple

2.1.1 Définition de la convergence simple d'une suite de fonctions

Soit E une partie de $\mathbf{K}$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions $f_n : E \to \mathbf{K}$ définies toutes sur E et à valeurs dans $\mathbf{K}$.

Définition 2.1.1 (Ensemble de convergence, convergence simple)
(i) On appelle *ensemble de convergence* le sous ensemble E' de E formé des $x \in E$ tels que la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge.
(ii) Soit F une partie de E et $f : F \to \mathbf{K}$ une fonction ; on dit que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge simplement* vers f sur F si, pour tout $x \in F$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge et $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Remarque 2.1.2 (i) Si $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers f sur $F \subset E$, alors, bien sûr, F est une partie de l'ensemble de convergence E' de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
(ii) Pour tout $x \in E'$, soit $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Alors f est une fonction définie sur E' et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers f sur E'.

(iii) Pour une partie F de E et une fonction $f : F \to \mathbf{K}$ on a : $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers f sur F si et seulement si : pour tout $x \in F$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $N = N(\varepsilon, x) \in \mathbf{N}$ tel que $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.

Exemple 2.1.3 (i) Soit $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f_n(x) = e^{-nx}$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si}\, x > 0 \\ 1 & \text{si}\, x = 0 \\ +\infty & \text{si}\, x < 0. \end{cases}$$

L'ensemble de convergence de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc $\mathbf{R}^+ = [0, +\infty[$ et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si}\, x > 0 \\ 1 & \text{si}\, x = 0. \end{cases}$$

On observera que f est discontinue bien que toutes les fonctions f_n soient continues.
(ii) Soit $f_n : [0, 1] \to \mathbf{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si}\, x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si}\, x = 1. \end{cases}$$

L'ensemble de convergence de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc $[0, 1]$ tout entier et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si}\, x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si}\, x = 1. \end{cases}$$

(iii) Soit $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{x^n + 1}{x^2 + 1}$. Pour $|x| < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$. Pour $x = 1$, on a $x^n = 1$ et donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(1) = 1$. Pour $x = -1$, on a $x^n = (-1)^n$ et donc $f_n(-1) = \dfrac{(-1)^n + 1}{x^2 + 1} = \dfrac{2}{x^2 + 1}$ si n est pair et $f_n(-1) = 0$ si n est impair. Ceci montre que $\lim_{n\in\mathbf{N}} f_n(-1)$ n'existe pas. Si $|x| > 1$, la suite $(x^n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas convergente et $\lim_{n\in\mathbf{N}} f_n(x)$ n'existe pas. En conclusion, l'ensemble de convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est $]-1,1]$ et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction $f:]-1,1]\to\mathbf{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+1} & \text{si}\, x\in]-1,1[\\ 1 & \text{si}\, x=1.\end{cases}$$

(iv) Soit $f_n:[0,\pi/2]\to\mathbf{R}$ définie par $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$. Comme $|\sin t|\leq 1$ pour tout t, on a $|f_n(x)|\leq 1/n$ pour tout x. Ceci montre que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction 0 sur $[0,\pi/2]$.
(v) Soit $g_n:[0,\pi/2]\to\mathbf{R}$ la dérivée la fonction f_n définie en (iv) plus haut. Alors $g_n(x)=n\dfrac{\cos nx}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}\cos nx$ ne converge pour aucune valeur de x. L'ensemble de convergence est donc vide ; a fortiori, g_n ne converge pas vers la dérivée $f'=0$ de la limite $f=0$ de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
(vi) Soit $f_n:[0,1]\to\mathbf{R}$ définie par $f_n(x)=nx(1-x^2)^n$. Alors f_n converge simplement vers la fonction $f=0$ sur $[0,1]$. On observera que

$$\int_0^1 f_n(x)dx=n\int_0^1 x(1-x^2)^n dx=\frac{n}{2n+2}$$

et donc $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=1/2$ alors que $\int_0^1 f(x)dx=0$.

2.1.2 Définition de la convergence simple d'une série de fonctions

Soit E une partie de $\mathbf{K}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions $u_n:E\to\mathbf{K}$ définies toutes sur E et à valeurs dans $\mathbf{K}$. On note S_n la fonction définie sur E par les sommes partielles :

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}u_k(x)=u_0(x)+u_1(x)+\cdots+u_n(x)\qquad\text{pour tout}\quad x\in E.$$

Définition 2.1.4 Soit E' l'ensemble de convergence de la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et notons $S(x):=\lim_{n\to+\infty}S_n(x)$ pour tout $x\in E'$. On dit que la *série* de terme général u_n converge simplement vers S sur E' et on écrit $\sum_n u_n(x)=S(x)$ ou $\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)=S(x)$ pour tout $x\in E'$

Remarque 2.1.5 (i) La série de terme général u_n converge simplement vers S si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers S.
(ii) La série de terme général u_n converge simplement vers S si et seulement si, pour tout $x \in E'$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $N = N(\varepsilon, x) \in \mathbf{N}$ tel que

$$|S_n(x) - S(x)| \leq \varepsilon \qquad\qquad \text{pour tout} \quad n \geq N.$$

Exemple 2.1.6 (i) **(Série géométrique)** Soit $u_n : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ définie par $u_n(z) = z^n$. Alors, pour tout $z \in \mathbf{C} \setminus \{1\}$ on a

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

et $S_n(1) = n$. L'ensemble de convergence de la série de terme général u_n est donc $E' = \{z \in \mathbf{C} \ : \ |z| < 1\}$ et $\lim_{n\to+\infty} S_n(z) = \dfrac{1}{1-z}$ pour tout z tel que $|z| < 1$.
(ii) Soit $u_n : [0, \pi/2] \to \mathbf{R}$ définie par $u_n(x) = \sin^2(x)\cos^n(x)$. La série de fonctions de terme général u_n converge simplement vers la fonction $S : [0, \pi/2] \to \mathbf{R}$ défine par

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(x)}{1 - \cos x} & \text{si } x \in]0, \pi/2[\\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2.2 Convergence uniforme

On a vu précedemment que, si u_n est une suite de fonctions continues convergeant simplement vers une fonction f, alors f n'est pas nécessairement continue ; de plus, la suite des dérivées des u_n (quand elles existent) ou de leurs intégrales ne converge pas nécessairement la limite vers la dérivée de f (qui peut même ne pas exister) ou son intégrale. Une notion de convergence va nous permettre de remédier à ce problème : la convergence uniforme. Ce sera une notion-clé dans ce cours.

2.2.1 Définition de la convergence uniforme d'une suite de fonctions

Soit E une partie de $\mathbf{K}$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions $f_n : E \to \mathbf{K}$. Soit E' l'ensemble de convergence de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et, pour tout $x \in E'$, soit $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

Définition 2.2.1 (Convergence uniforme) On dit que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge uniformément* vers f sur une partie F de E' si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N = N(\varepsilon)$ tel que, pour tout $x \in F$ et tout $n \geq N$ on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Remarque 2.2.2 (i) La différence entre la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et la convergence simple est que le N de la définition précedente ne dépend que de ε et non de x (comparer avec la Remarque 2.1.2.iii).
(ii) Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur F, alors il évident que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers f sur F. La réciproque est fausse, comme le montre l'Exemple 2.2.3.ii plus bas.
(iii) La suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur F si et seulement si : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ tel que $\sup_{x\in F} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.
(iv) La suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur F si et seulement si :

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in F} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

c-à-d si et seulement si la suite numérique $(\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in F} |f_n(x) - f(x)|)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0.

Exemple 2.2.3 (i) Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0, 2\pi]$ par $f_n(x) = \dfrac{\sin x}{n}$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction $f = 0$ sur $[0, 2\pi]$; en effet,

$$\sup_{x\in[0,2\pi]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,2\pi]} \left|\frac{\sin x}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$$

et donc $\lim_{n\to+\infty}(\sup_{x\in[0,2\pi]} |f_n(x) - f(x)|) = 0$.

(ii) Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = x^n$; on a vu (Exemple 2.1.3.ii) que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction f sur $[[0,1]$ définie par $f(x) = 0$ si $x = 0$ et $f(1) = 1$. On a, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1[} |x^n| = 1;$$

La suite $(\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|)_{n\in\mathbf{N}}$ ne tend donc pas vers 0 et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas uniformément vers f.

2.2.2 Convergence uniforme d'une série de fonctions

Définition 2.2.4 (Convergence uniforme de séries) On dit qu'une série de fonctions de terme général u_n *converge uniformément* sur F vers une fonction S si la suite de fonctions formée par les séries partielles $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur F vers S ; en d'autres termes, si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\sup_{x\in F} |\sum_{k=0}^{n} u_k(x) - S(x)| \leq \varepsilon \qquad \text{pour tout} \quad n \geq N.$$

Remarque 2.2.5 Si une série de fonctions de terme général u_n converge uniformément vers une fonction S, elle converge simplement vers S. La réciproque est fausse (voir Exemple 2.2.6.i plus bas).

Exemple 2.2.6 (i) On considère la série de fonctions sur $\mathbf{R}$ de terme général $u_n(x) = x^n$; son domaine de convergence est $]-1,1[$ et cette série converge simplement vers la fonction $S : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$. La convergence n'est pas uniforme sur $]-1,1[$; en effet, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\left|\sum_{k=0}^{n} x^n - \frac{1}{1-x}\right| = \left|\frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right|;$$

comme

$$\sup_{x\in]-1,1[} \left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right| = +\infty,$$

il s'ensuit que $(\sup_{x\in]-1,1[} |S_n(x) - S(x)|)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas vers 0.

(ii) Soit $a \in]0,1[$. La série précedente converge uniformément vers S sur $[-a,a]$. En effet,

$$\sup_{x\in[-a,a]} \left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right| = \frac{a^{n+1}}{1-a}$$

et donc $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[-a,a]} |S_n(x) - S(x)| = 0$.

2.2.3 Critère de Cauchy pour la convergence uniforme

Il existe un critère de Cauchy pour la convergence uniforme d'une suite ou série de fonctions. Comme pour les suites ou séries numériques, l'utilité de ce critère est qu'il permet de montrer la convergence sans connaître explicitement la limite.

Théorème 2.2.7 ***(Critère de Cauchy uniforme)*** *(i) Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sur E converge uniformément sur une partie F de E si et seulement si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tous $p, q \geq N$, on a*

$$\sup_{x\in F} |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon.$$

(ii) Une série de fonctions sur E de terme général u_n converge uniformément sur une partie F si et seulement si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tous $p > q \geq N$, on a

$$\sup_{x\in F} |S_p(x) - S_q(x)| = \sup_{x\in F} |\sum_{k=q+1}^{p} u_k(x)| \leq \varepsilon.$$

Démonstration
(i) Supposons que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur F vers f. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a

$$\sup_{x\in F} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2$$

Il s'ensuit que, pour tout $p, q \geq N$ et tout $x \in F$ on a, par l'inégalité triangulaire,

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq |f_p(x) - f(x)| + |f(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon.$$

Ceci signifie que

$$\sup_{x\in F} |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon.$$

Réciproquement, supposons pour, tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $p, q \geq N$, on a

$$\sup_{x\in F} |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$$

Pour tout $x \in F$ fixé, on a donc

$$(*) \qquad |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon \qquad \text{pour tout} \quad p, q \geq N$$

et la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbf{K}$. D'après le critère de Cauchy, $f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ existe donc pour tout $x \in F$. En faisant $q \to +\infty$ dans l'inégalité $(*)$ plus haut, on a

$$|f_p(x) - f(x)| \leq \varepsilon \qquad \text{pour tout} \quad p \geq N$$

et donc

$$\sup_{x\in F} |f_p(x) - f(x)| \leq \varepsilon \qquad \text{pour tout} \quad p \geq N.$$

Ceci montre la convergence uniforme de la suite f_n vers f.
(ii) L'assertion découle de l'assertion (i) en prenant $f_n := S_n$. ■

Corollaire 2.2.8 *Si une série de fonctions sur E de terme général u_n converge uniformément sur une partie F, alors* $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in F} |u_n(x)| = 0$

Démonstration On a

$$\sup_{x\in F} |u_n(x)| = \sup_{x\in F} |S_n(x) - S_{n-1}(x)|.$$

D'après le critère de Cauchy (Théorème 2.2.7), la suite $(\sup_{x\in E'} |u_n(x)|)_{n\in\mathbf{N}}$ tend donc vers 0. ■

Remarque 2.2.9 Comme pour les séries numériques, on utilise souvent la contraposée de ce corollaire : si la suite $(\sup_{x\in F} |u_n(x)|)_{n\in\mathbf{N}}$ ne tend pas vers 0, alors la série de terme général u_n ne pas converge uniformément sur F. De même que pour les séries numériques, la réciproque n'est pas nécessairement vraie : si $(\sup_{x\in F} |u_n(x)|)_{n\in\mathbf{N}}$ tend uniformément vers 0, la série de terme général u_n ne pas converge toujours uniformément (ou même simplement ; voir Example 2.2.10.iii plus bas).

Exemple 2.2.10 (i) La série de terme général $x \mapsto u_n(x) = x^n$ converge simplement sur $]-1,1[$; on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\sup_{x\in[0,1[} |u_n(x)| = \sup_{x\in[0,1[} |x^n| = 1.$$

On retrouve ainsi le fait, déjà vu précédemment Exemple 2.2.6.i), que cette série ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$.
(ii) La série de terme général $x \mapsto u_n(x) = \dfrac{x}{x+n^2}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$: pour chaque $x \geq$, on a $\frac{x}{x+n^2} \leq x\dfrac{1}{n^2}$ et la série numérique de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ est convergente ; d'autre part, on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\sup_{x\in[0,+\infty[} \frac{x}{x+n^2} = 1$$

car $x \mapsto \dfrac{x}{x+n^2}$ est croissante et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+n^2} = 1$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,+\infty[} |u_n(x)| = 1 \neq 0.$$

Ceci montre que la série ne converge pas uniformément sur $[0,\infty[$.
(iii) La série de terme général constant $x \mapsto u_n(x) = \dfrac{1}{n}$ ne converge pour aucun $x \in \mathbf{R}$. D'autre part, la suite $\sup_{x\in\mathbf{R}} |u_n(x)| = \dfrac{1}{n}$ converge vers 0.

2.3 Convergence normale d'une série de fonctions

On dispose, pour les séries de fonctions, d'une notion de convergence impliquant la convergence uniforme et souvent facile à vérifier : la convergence normale.

Définition 2.3.1 (Convergence normale d'une série de fonctions) On dit qu'une série de fonctions de terme général u_n *converge normalement* sur un ensemble E s'il existe une série numérique de terme positif a_n qui soit convergente et telle que $|u_n(x)| \leq a_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in E$.

Remarque 2.3.2 Une série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur E si et seulement la série numérique de terme général $\sup_{x\in E}|u_n(x)|$ est convergente

Théorème 2.3.3 ***(La convergence normale implique la convergence uniforme)*** *Si une série de fonctions de terme général u_n* converge normalement *sur un ensemble E, alors elle converge uniformément sur E.*

Démonstration On va vérifier le critère de Cauchy pour les séries de fonctions (Theorème 2.2.7). Par hypothèse, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ avec $a_n \geq 0$ telle que la série $\sum_n a_n$ est convergente et telle que $\sup_{x\in E}|u_n(x)| \leq a_n$ pour tout n.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la série numérique $\sum_n a_n$ est convergente, elle satisfait au critère de Cauchy ; il existe ainsi $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\sum_{k=q+1}^{p} a_k \leq \varepsilon \qquad \text{pour tous} \quad p > q \geq N.$$

On a alors

$$\sum_{k=q+1}^{p} \sup_{x\in E}|u_k(x)| \leq \varepsilon \qquad \text{pour tous} \quad p > q \geq N.$$

D'autre part, par l'inégalité triangulaire, on a, pour tous $p > q \in \mathbf{N}$:

$$\sup_{x\in E}|\sum_{k=q+1}^{p} u_k(x)| \leq \sum_{k=q+1}^{p} \sup_{x\in E}|u_k(x)|.$$

Il s'ensuit des deux inégalités précédentes que

$$\sup_{x\in E}|\sum_{k=q+1}^{p} u_k(x)| \leq \varepsilon \qquad \text{pour tous} \quad p > q \geq N.$$

La série de terme général u_n vérifie donc le critère de Cauchy.■

Remarque 2.3.4 Une série uniformément convergente n'est pas nécessairement normalement convergente (voir Exemple 2.3.5.ii plus bas ou Exercice 2.6.21).

Exemple 2.3.5 (i) Soit $u_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$. On a, pour tout $n \geq 1$,

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |u_n(x)| = \left| \frac{\sin(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

et la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ est convergente ; la série de terme général u_n est ainsi normalement convergence et donc uniformément convergente.
(ii) On considère la série de fonctions sur $\mathbf{R}$ ou sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ de terme général donné par la fonction constante $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n}$. Par le critère de Leibniz (voir le rappel en Remarque 3.5.1 ou aussi l'Exercice 2.6.15), la série numérique de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente ; la série de terme général u_n est donc uniformément convergente sur $\mathbf{R}$ ou I. Cependant, comme la série de terme général $\left| \dfrac{(-1)^n}{n} \right| = \dfrac{1}{n}$ n'est pas convergente, la série de fonctions considérée n'est pas normalement convergente.

Remarque 2.3.6 L'étude de la convergence d'une *série* de terme général u_n est l'étude de la convergence de la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Ceci permet, dans une certaine mesure, de ramener à l'étude des séries à celle des suites. Réciproquement, on peut exploiter les critères de convergence uniforme d'une série (comme la convergence normale) pour montrer la convergence uniforme d'une *suite* de fonctions. C'est le procédé de "transformation" d'une suite en série qui a déjà été vu pour les suites numériques. Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions sur une partie E de $\mathbf{K}$. On considère la suite définie par $u_0 = f_0$ et $u_n := f_n - f_{n-1}$ pour $n \geq 1$. Alors la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n est

$$S_n = f_0 + (f_1 - f_0) + \cdots + (f_n - f_{n-1}) = f_n.$$

La convergence (simple ou uniforme) de la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$) équivaut donc à celle de la série de terme général u_n.

2.4 Propriétés des limites uniformes de suites

Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions sur une partie E de $\mathbf{K}$ qui converge uniformément sur E vers une fonction $f : E \to \mathbf{K}$; nous allons voir que, dans une certaine mesure, les propriétés de régularité des f_n (continuité, dérivabilité, etc) sont héritées par f.

On rappelle qu'une fonction $f : E \to \mathbf{K}$ est continue en $x_0 \in E$ si :

$$\lim_{x \to x_0, x \in E} f(x) = f(x_0),$$

ou, de manière équivalente, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in E$ avec $|x - x_0| \leq \delta$, on a $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

2.4.1 Continuité de limites uniformes de fonctions continues

Théorème 2.4.1 ***(Continuité d'une limite uniforme)*** *Soit E une partie de $\mathbf{K}$ et $f_n : E \to \mathbf{K}$ une suite de fonctions uniformément convergentes vers une fonction $f : E \to \mathbf{K}$. Soit $x_0 \in E$. Si les f_n sont continues en x_0, alors f est continue en x_0. En particulier, si les f_n sont continues sur E, alors f est continue sur E.*

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément sur E vers f, il existe N tel que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/3 \qquad \text{pour tout} \quad x \in E \text{ et} \qquad \text{pour tout} \quad n \geq N;$$

en particulier, on a

$$(*) \qquad |f_N(x) - f(x)| \leq \varepsilon/3 \qquad \text{pour tout} \quad x \in E.$$

Puisque f_N est continue en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in E$ avec $|x - x_0| \leq \delta$, on a

$$(**) \qquad |f_N(x) - f_N(x_0)| \leq \varepsilon/3.$$

Soit $x \in E$ avec $|x - x_0| \leq \delta$; on a alors, en utilisant l'inégalité triangulaire et les inégalités $(*)$ et $(**)$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque 2.4.2 (i) La continuité de f_n et de f en x_0 signifie :

$$\lim_{x\to x_0} f_n(x) = f_n(x_0) \text{ et } \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0);$$

comme $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ et $f(x_0) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x_0)$, la conclusion du théorème précédent peut s'écrire comme une *interversion de limites :*

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

(ii) Le théorème précédent peut être en défaut si on remplace la convergence uniforme par la convergence simple ; nous avons vu plusieurs exemples (voir Exemples 2.1.3) de suites de fonctions f_n continues (et même indéfiniment dérivables) dont la limite simple n'est pas continue.

2.4.2 Intégrale d'une limite uniforme de fonctions continues

Théorème 2.4.3 ***(Intégrale d'une limite uniforme)*** *Soit* $[a, b]$ *un intervalle borné de* $\mathbf{R}$ *et et* $f_n : [a, b] \to \mathbf{K}$ *une suite de fonctions* continues *uniformément convergentes vers une fonction (continue)* $f : [a, b] \to \mathbf{K}$. *Alors on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers f, il existe N tel que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \qquad \text{pour tout} \quad x \in [a, b] \text{ et} \qquad \text{pour tout} \quad n \geq N.$$

Soit $n \geq N$. On a (en utilisant la monotonie de l'intégrale) :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| &= \left|\int_a^b (f_n(x)dx - f(x))dx\right| \\
&\leq \int_a^b |f_n(x)dx - f(x)|dx \\
&\leq \int_a^b \varepsilon dx \\
&= \varepsilon(b-a). \blacksquare
\end{aligned}$$

Remarque 2.4.4 La conclusion du théorème précédent peut s'écrire comme une *interversion* d'une limite et d'une intégrale :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx.$$

Corollaire 2.4.5 ***(Primitive d'une limite uniforme)*** *Sous les hypothèses du théorème précédent (Théorème 2.4.3), soit $x_0 \in [a,b]$ et notons $F_n : x \to \int_{x_0}^x f_n(t)dt$ et $F : x \to \int_{x_0}^x f(t)dt$ les primitives de f_n et de f nulles en x_0 Alors la suite $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers F sur $[a,b]$.*

Démonstration En reprenant la démonstration du Théorème 2.4.3 et en remplaçant a par x_0 et b par x, on a

$$|F_n(x) - F(x)| = \left|\int_{x_0}^x f_n(t)dt - \int_{x_0}^x f(t)dt\right| \leq \varepsilon|x - x_0| \leq \varepsilon(b-a).$$

et l'assertion s'ensuit. ■

Remarque 2.4.6 (i) La conclusion du Théoème 2.4.3 peut être en défaut si on suppose seulement que la suite de fonctions f_n converge simplement vers une fonction continue f. Un tel exemple est donné dans Exemple 2.1.3.vi. Voici un autre exemple : soit $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ la fonction continue définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x & \text{si } x \in [0, 1/2n] \\ 2n - 2n^2x & \text{si } x \in [1/2n, 1/n] \\ 0 & \text{si } x \in [1/n, 1] \end{cases}$$

La suite f_n converge simplement vers la fonction $f = 0$; en effet, on a $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $x > 0$; alors $x \geq 1/n$ pour tout $n \geq N := E(1/x)$ et donc $f_n(x) = 0$ pour tout $n \geq N := E(1/x)$. D'autre part, pour tout $n \geq 1$, on a $\int_0^1 f_n(x)dx = \dfrac{1}{2}$. Mais $\int_0^1 f(x)dx = 0$.
(ii) La conclusion du Théoème 2.4.3 peut être en défaut si on remplace l'intervalle borné $[a,b]$ par un intervalle non borné : soit $f_n : [0,+\infty] \to \mathbf{R}$ la fonction continue définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } x \in [0, n] \\ n\left(n + \dfrac{1}{n}\right) - nx & \text{si } x \in [n, n + \dfrac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [n + \dfrac{1}{n}, +\infty[. \end{cases}$$

La suite f_n converge uniformément vers la fonction $f = 0$ sur $[0, +\infty[$; en effet, on a $\sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| = \dfrac{1}{n}$ pour tout n et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| = 0.$$

D'autre part, on

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \int_0^n f_n(x)dx + \int_n^{n+1/n} f_n(x)dx = 1 + \frac{1}{2n}$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx = 1 \neq 0 = \int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

Pour un autre exemple, voir l'Exercice 2.6.19

(iii) Le Théorème 2.4.3 est encore valable si on suppose que f et les f_n sont seulement continues par morceaux. (On rappelle qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbf{C}$ est continue par morceaux s'il existe une suite $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_r = b$ telle que $f|_{]a_i,a_{i+1}[}$ est continue et telle que les limites à droite et à gauche $f(a_i+)$ et $f(a_{i+1}-)$ existent, pour tout $i = 0, \ldots, r-1$.)

2.4.3 Limite uniforme de fonctions dérivables

Théorème 2.4.7 ***(Dérivée d'une limite uniforme)*** *Soit $[a, b]$ un intervalle borné de $\mathbf{R}$ et et $f_n : [a, b] \to \mathbf{K}$ une suite de fonctions admettant des dérivées continues sur $[a, b]$. On suppose que :*

- *la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est uniformément convergente vers une fonction (continue) $f : [a, b] \to \mathbf{K}$;*
- *la suite des dérivées $(f_n')_{n\in\mathbf{N}}$ est uniformément convergente vers une fonction (continue) $g : [a, b] \to \mathbf{K}$.*

Alors f admet une dérivée continue et $f' = g$.

Démonstration Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in [a, b]$, on a

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)dt.$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n(a) = f(a)$. D'autre part, par le Corollaire 2.4.5, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^x f_n'(t)dt = \int_a^x g(t)dt.$$

Il s'ensuit que

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt.$$

Comme g est continue, il s'ensuit que f est dérivable et que $f' = g$.■

Remarque 2.4.8 La conclusion du Théorème n'est plus nécessairement valable sans l'hypothèse de la convergence uniforme des dérivées des f_n. Un exemple est fourni par la suite f_n avec $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, comme vu en Exemple 2.1.3.iv.

2.5 Propriétés d'une série uniformément convergente

Les propriétés que nous venons de voir des limites uniformes de suites ont une traduction pour les séries uniformément convergentes.

Théorème 2.5.1 ***(Continuité d'une série uniformément convergente)*** *Soit E une partie de $\mathbf{K}$ et $u_n : E \to \mathbf{K}$ une suite de fonctions . On suppose que la série $\sum_n u_n$ est uniformément convergente vers une fonction $S : E \to \mathbf{K}$. Soit $x_0 \in E$. Si les u_n sont continues sur E, alors S est continue sur E.*

Démonstration On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_n$. Alors les S_n sont continues et convergent uniformément vers S sur E. On conclut avec le Théorème 2.4.1. ■

Théorème 2.5.2 ***(Intégrale d'une série uniformément convergente)*** *Soit $[a, b]$ un intervalle borné de $\mathbf{R}$ et et $u_n : [a, b] \to \mathbf{K}$ une suite de fonctions continues. On suppose que la série $\sum_n u_n$ est uniformément convergente vers une fonction $S : [a, b] \to \mathbf{K}$. Alors la série numérique de terme général $\int_a^b u_n(x)dx$ converge vers $\int_a^b S(x)dx$.*

Démonstration On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_n$. Alors les S_n sont continues et convergent uniformément vers S sur E. On conclut alors avec le Théorème 2.4.3.■

Remarque 2.5.3 La conclusion du théorème précédent peut s'écrire comme une interversion d'une somme et d'une intégrale :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right) dx.$$

Corollaire 2.5.4 ***(Primitive d'une série uniformément convergente)*** *Sous les hypothèses du théorème précédent (Théorème 2.5.2), soit $x_0 \in [a,b]$ et notons $F_n : x \to \int_{x_0}^x u_n(t)dt$ et $F : x \to \int_{x_0}^x S(t)dt$ les primitives de u_n et de S nulles en x_0 Alors la série de fonction de fonctions de terme général $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers F sur $[a,b]$.*

Théorème 2.5.5 ***(Dérivée d'une série uniformément convergente)*** *Soit $[a,b]$ un intervalle borné de $\mathbf{R}$ et et $u_n : [a,b] \to \mathbf{K}$ une suite de fonctions admettant des dérivées continues sur $[a,b]$. On suppose que :*

- *la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est uniformément convergente vers une fonction $S : [a,b] \to \mathbf{K}$;*
- *la série de terme général $(u_n')_{n\in\mathbf{N}}$ est uniformément convergente vers une fonction (continue) $g : [a,b] \to \mathbf{K}$.*

Alors S admet une dérivée continue et $S' = g$.

Démonstration On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_n$. Alors les S_n sont continues et convergent uniformément vers S sur E. On a $S_n' = \sum_{k=0}^n u_n'$. On conclut alors avec le Théorème 2.4.7.■

Remarque 2.5.6 La conclusion du théorème précédent peut s'écrire comme une interversion d'une somme et d'une dérivation :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)'.$$

2.6 Exercices

Exercice 2.6.1 (Limite supérieure et limite inférieure d'une suite) On rappelle que la limite supérieure $\overline{\lim}\, u_n$ et la limite inférieure $\underline{\lim}\, u_n$ d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels sont définies par :

$$\overline{\lim} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sup\{u_k |\ k \geq n\} \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$$

$$\underline{\lim} u_n = \lim_{n\to+\infty} \inf\{u_k |\ k \geq n\} \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}.$$

(i) Montrer que $\overline{\lim} u_n \in \mathbf{R}$ et $\underline{\lim} u_n \in \mathbf{R}$ si $(u_n)_n$ est bornée (c-à-d minorée et majorée).
(ii) Déterminer $\underline{\lim}(-1)^n$ et $\overline{\lim}(-1)^n$.

(iii) Déterminer $\underline{\lim}(-1)^n 1/n$ et $\overline{\lim}(-1)^n 1/n$.

(iv) Déterminer $\underline{\lim}\cos(2n\pi/3)$ et $\overline{\lim}\cos(2n\pi/3)$.

(v) Déterminer $\underline{\lim}(-1)^n n$ et $\overline{\lim}(-1)^n n$.

(vi) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels. Montrer que $\underline{\lim} u_n \leq \overline{\lim} u_n$.

(vii) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée de nombres réels. Montrer que $\underline{\lim} u_n = \overline{\lim} u_n$ si et seulement si $(u_n)_n$ est convergente et que, dans ce cas, $\underline{\lim} u_n = \overline{\lim} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

(viii) Déterminer $\underline{\lim}\, n^{1/n}$ et $\overline{\lim}\, n^{1/n}$.

(ix) Montrer que, pour toutes suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels, on a $\overline{\lim}(u_n + v_n) \leq \overline{\lim} u_n + \overline{\lim} v_n$ et $\underline{\lim}(u_n + v_n) \geq \underline{\lim} u_n + \underline{\lim} v_n$. Montrer par des exemples que ces inégalités peuvent être strictes.

(x) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée de nombres réels. Montrer que $\overline{\lim} u_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de $(u_n)_n$ et $\underline{\lim} u_n$ sa plus petite valeur d'adhérence.

Exercice 2.6.2 (Moyenne arithmético-géométrique) Soient a et b deux nombres réels positifs avec $0 < b \leq a$. On définit, par récurrence, deux suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par $a_0 = a, b_0 = b$ et $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$.

(i) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $b \leq b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n \leq a$.

(ii) Déduire de (i) que $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers une même limite, notée $M(a,b)$ et appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b.

(iii) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $0 \leq a_{n+1} - b_{n+1} \leq \dfrac{1}{8b}(a_n - b_n)^2$.

(iv) Déduire de (ii) une majoration des restes $|a_n - M(a,b)|$ et $|b_n - M(a,b)|$.

Exercice 2.6.3 (Etude de la convergence de quelques séries) Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

(i) $u_n = n\sin(1/n)$ (ii) $u_n = (1/2)^{\sqrt{n}}$

(iii) $u_n = \dfrac{1}{n}\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ (iv) $u_n = 1-\cos(1/n)$

(v) $u_n = ne^{-\sqrt{n}}$ (vi) $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

(vii) $u_n = (-1)^n\left(e-(1+\dfrac{1}{n})^n\right)$ (viii) $u_n = \sin\sqrt{1+n^2\pi^2}$

(ix) $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ (x) $u_n = \dfrac{n!}{n^{an}}$ $(a\in\mathbf{R})$

(xi) $u_n = \dfrac{1}{(\log n)^n}$ (xii) $u_n = \dfrac{1}{(\log n)^{\log n}}$

(xiii) $u_n = \dfrac{n^2}{(\sqrt{1+a})^n}$ $(|a|<1)$ (xiv) $u_n = \dfrac{1+2+\cdots+n}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$

(xv) $u_n = e^{-\sin n}$ (xvi) $u_n = \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$.

Indication pour (xvi) : montrer que $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$ est un entier et se ramener à l'étude de $\sum\sin(\pi(2-\sqrt{3})^n)$.

Exercice 2.6.4 (Une condition nécessaire pour la convergence d'une série de terme général décroissant) (i) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite *décroissante* de nombres positifs telle que la série $\sum u_n$ soit convergente. Montrer que $\lim_n nu_n = 0$.

Indication : on pourra commencer par montrer que $\lim_n 2nu_{2n} = 0$ et montrer ensuite que $\lim_n(2n+1)u_{2n+1} = 0$.

(ii) Montrer, par un exemple, que l'hypothèse de décroissance de u_n est nécessaire dans (i).

Exercice 2.6.5 (Etude des points de continuité d'une fonction) Soit $f : [0,\infty[\to\mathbf{R}$ la fonction défine de la manière suivante : $f(x) = 0$ si x est irrationnel, $f(x) = 1/q$ si $x = p/q$ pour $p, q\in\mathbf{N}^*$ premiers entre eux et $f(0) = 0$.
(i) Soit $x\in]0,+\infty[$ rationnel. Montrer que f n'est pas continue en x.
(ii) Soit $x\in]0,+\infty[$ irrationnel ou $x = 0$. Montrer que f est continue en x.

Exercice 2.6.6 (Dérivée non continue) Soit $f : \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^2\sin(1/x)$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.

Soit $n\in\mathbf{N}^*$. Donner un exemple d'une fonction d'une fonction n-fois dérivable $f : \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ telle que $f^{(n)}$ ne soit pas continue en 0.

Exercice 2.6.7 (Une fonction non dérivable)
(i) Soit $x \in [0, \pi/2]$. Montrer que $\sin x \geq \dfrac{2x}{\pi}$.
Indication : étudier le tableau de variation de la fonction $x \mapsto \sin x - \frac{2x}{\pi}$ sur $[0, \pi/2]$.
(ii) Soit $x \in \mathbf{R}$. Montrer que la série $\sum_n \dfrac{\sin(2^n x)}{2^n}$ est absolument convergente.

Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(2^n x)}{2^n}$.
(iii) Montrer que $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est continue.
(iv) Soit $N \in \mathbf{N}$ et $x_N = \dfrac{\pi}{2^{N+1}}$. Montrer que $f(x_N) \geq \dfrac{2Nx_N}{\pi}$.
(v) Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 2.6.8 (Convergence simple et convergence uniforme) Pour $x \in \mathbf{R}^+$, soit $f_n(x) = e^{-nx}\sin(2nx)$.
(i) Déterminer $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$
(ii) Soit $a > 0$. Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ vers f.
(iii) La suite $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbf{R}^+$ vers f?

Exercice 2.6.9 (Convergence simple et convergence uniforme) Soit $a \geq 0$. Pour $x \in [0, 1]$, soit $f_n(x) = n^a x^n(1 - x)$.
(i) Déterminer $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.
(ii) Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $\sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = \dfrac{n^a}{n+1}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.
(iii) Déduire de (i) que $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers f si et seulement si $a < 1$.

Exercice 2.6.10 (Convergence simple et convergence uniforme) Pour $x \in [0, +\infty]$, soit $f_n(x) = \dfrac{3^n x}{1 + 3^n n x^2}$.
(i) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.
(ii) Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$ et $\lim_n I_n$.
(iii) Déduire de (ii) que $(f_n)_n$ ne converge uniformément sur $[0, 1]$.
(iv) Montrer directement que $(f_n)_n$ ne converge uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 2.6.11 (Convergence simple et convergence uniforme) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = \dfrac{x}{nx^2 + 1}$.

1. Déterminer l'ensemble de convergence $E \subset \mathbf{R}$ de la suite de fonctions f_n ainsi que sa limite $f : E \to \mathbf{R}$.

2. Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé. Déterminer $\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|$.

3. La suite de fonctions f_n converge-t-elle uniformément vers f sur E?

Exercice 2.6.12 (Convergence simple et convergence uniforme) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = n(x^n - x^{n+1})$.

1. Déterminer l'ensemble de convergence $E \subset [0,1]$ de la suite de fonctions f_n ainsi que sa limite $f : E \to \mathbf{R}$.

2. Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé. Déterminer $\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|$.

3. En déduire que la suite de fonctions f_n ne converge pas uniformément vers f sur E.

4. Soit $a \in]0,1[$. Montrer que la suite de fonctions f_n converge uniformément vers f sur $[0,a]$.

Exercice 2.6.13 (Convergence simple et convergence uniforme) Pour $x \in [0,+\infty]$, soit $u_n(x) = \dfrac{x}{x+n^2}$.

(i) Déterminer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

(ii) Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[0,a]$ pour $a > 0$.

Exercice 2.6.14 (Etude de la convergence de suites de fonctions) Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions suivantes

$f_n : E \to \mathbf{R}$, avec $E = [0,1]$ pour (i)-(iv) et $E = [0, +\infty[$ pour (v)-(viii) :

$$\text{(i)} f_n(x) = \begin{cases} 1/n & \text{si } x \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{si } x \in]1/n, 1] \end{cases} \qquad \text{(v)} \quad f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in [0, n] \\ -n^2x + n^3 + n & \text{si } n \le x \le n + \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } x \ge n + \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$\text{(ii)} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{si } x \in]1/n, 1] \end{cases} \qquad \text{(vi)} \quad f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x \le n - \frac{1}{n} \\ nx - n^2 + 1 & \text{si } n - \frac{1}{n} \le x \le n \\ -nx + n^2 + 1 & \text{si } n \le x \le n + \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } x \ge n + \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$\text{(iii)} f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{si } x \in]1/n, 1] \end{cases} \qquad \text{(vii)} \quad f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x \le n - \frac{1}{n} \\ x - n + \frac{1}{n} & \text{si } n - \frac{1}{n} \le x \le n \\ -x + n + \frac{1}{n} & \text{si } n \le x \le n + \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } x \ge n + \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$\text{(iv)} f_n(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1/n] \\ 1/n & \text{si } x \in]1/n, 1] \end{cases} \qquad \text{(viii)} \quad f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x \le n - \frac{1}{n} \\ n^2x - n^3 + n & \text{si } n - \frac{1}{n} \le x \le n \\ -n^2x + n^3 + n & \text{si } n \le x \le n + \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } x \ge n + \frac{1}{n} \end{cases}$$

Exercice 2.6.15 (Intégrales de limites) Calculer la limite $\lim_{n \to +\infty} \int_I f_n(x)dx$ et la comparer avec l'intégrale $\int_I f(x)dx$ de la limite f pour les fonctions f_n de l'Exercice 2.6.14 sur leur ensemble de convergence I.

Exercice 2.6.16 (Limite de dérivées) Soit $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$. Etudier la convergence de la suite $(f_n)_n$ et de la suite $(f'_n)_n$ de ses derivées.

Exercice 2.6.17 (Etude de la convergence de séries) Etudier la convergence simple, uniforme ou normale de la série de terme général $u_n : E \to \mathbf{R}$:

(i) $E = \mathbf{R}, \quad u_n(x) = 2^n x^n$

(ii) $E = \mathbf{R}, \quad u_n(x) = \dfrac{x^2}{(x^2+1)^n}$

(iii) $E = \mathbf{R}, \quad u_n(x) = \dfrac{1}{n^2} x^n$

(iv) $E = \mathbf{R}, \quad u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n!} x^n$

(v) $E = [0,1], \quad u_n(x) = \log\left(x + \dfrac{1}{n}\right)$

(vi) $E = \mathbf{R}, \quad u_n(x) = \dfrac{(\log(n))^3}{n^2} x^n$

Exercice 2.6.18 (Primitives et dérivées de séries) (i) Pour $n \geq 1$, soit $u_n : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$ définie par $u_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$. Calculer la primitive F sur $[0, 2\pi]$ avec $F(0) = 0$ de la série de terme général u_n.
(ii) Pour $n \geq 1$, soit $u_n : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$ définie par $u_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^3}$. Calculer la dérivée de la série de terme général u_n sur $[0, 2\pi]$.
(iii) Pour $n \in \mathbf{N}$, soit $u_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $u_n(x) = \frac{x^n}{n!}$. Calculer la primitive F sur $\mathbf{R}$ avec $F(0) = 1$ de la série de terme général u_n.
(iv) Pour $n \in \mathbf{N}$, soit $u_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$. Calculer la dérivée de la série de terme général u_n sur $\mathbf{R}$.

Exercice 2.6.19 (Intégrale d'une limite uniforme sur un intervalle non borné) Soit $u_n : [1, +\infty[\to \mathbf{R}$ définie par

$$u_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } x \in [n^2, (n+1)^2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(i) Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$ vers une fonction f à déterminer.
(ii) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \int_1^{+\infty} u_n(x)dx \neq \int_1^{+\infty} f(x)dx$.

Exercice 2.6.20 (Etude d'une série de fonctions) Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions de $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$.
(i) Montrer que la série de terme général u_n converge simplement sur $]-1, 1[$ et uniformément sur $[-a, a]$ pour tout $0 < a < 1$. On note $s : x \mapsto s(x)$ la somme de cette série.
(ii) En considérant la série des dérivées $\sum_n u_n'$, déterminer s.
(iii) Calculer la somme de la série $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4 \times 2} + \dfrac{1}{8 \times 3} + \cdots + \dfrac{1}{2^n n} + \cdots$

Exercice 2.6.21 (Une série uniformément convergente qui n'est pas normalement convergente) Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit $u_n : [1, +\infty[\to \mathbf{R}$ définie par

$$u_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } x \in [n, n+1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(i) Soit $x \in [1, +\infty[$. Montrer que la série numérique de terme général $u_n(x)$ converge vers une limite $f(x)$ qu'on explicitera.

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbf{R}$ la fonction ainsi définie.
(ii) Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in [1, +\infty[$, calculer $S_n(x) - f(x)$, où $S_n(x)$ est la n-ième somme partielle de la série de terme général $u_n(x)$.
(iii) Montrer que la série de fonctions de terme général u_n converge uniformément sur $[1, +\infty[$.
(iv) Montrer que la série de fonctions de terme général u_n n'est pas normalement convergente sur $[1, +\infty[$.

Exercice 2.6.22 (Rappel : Critère de Leibniz) Soit (v_n) une suite décroissante de nombres réels positifs. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$. On veut montrer que la série (dite alternée) de terme général $u_n := (-1)^n v_n$ est convergente.

On note S_n la n-ième somme partielle de la série de terme général u_n.
(i) Montrer que la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.
(ii) Montrer que la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.
(iii) Montrer que les suites $(S_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(S_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ sont convergentes ; notons S et S' leurs limites respectives.
(iv) Montrer que $S = S'$.
(v) Conclure.

Exercice 2.6.23 (*) Soit $(f_n)_n$ la suite de fonction définie sur $[0, 1]$, par récurrence, par $f_0(x) = x$ et $f_{n+1} = 2f_n(1 - f_n)$ pour $n \geq 0$.
(i) Montrer que $(f_n)_n$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f qu'on déterminera. n *Indication :* Observer que, pour $f : [0, 1] \to [0, 1]$ définie par $f(x) = 2x(1 - x)$, on a $f_n(x) = f \circ \cdots \circ f(x)$ (n fois) ; montrer que $f([0, 1]) = [0, 1/2]$ et que $f(x) - x \geq 0$ pour tout $x \in [0, 1/2]$.
(ii) Soit $n \in \mathbf{N}$. Donner une expression simple pour $\frac{1}{2} - f_n$ et retrouver le résultat (i).
(iii) Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout intervalle fermé I contenu dans $]0, 1[$. La convergence est-elle uniforme sur $[0, 1]$?

Exercice 2.6.24 (*) Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante de nombres réels positifs. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on définit $u_n : [0, 1] \to \mathbf{R}$ par $u_n(x) = a_n x^n (1 - x)$.
(i) Montrer que la série de fonctions de terme général u_n converge simplement sur $[0, 1]$.
(iii) Montrer que la série de terme général u_n converge normalement sur $[0, 1]$ si et seulement si la série numérique de terme général a_n/n converge. Indication : trouver un équivalent de $\sup_{x\in[0,1]} |u_n(x)|$.
(iii) Montrer que la série de terme général u_n converge uniformément sur $[0, 1]$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Chapitre 3

Séries entières

Dans ce chapitre, nous allons étudier les séries de fonctions de la forme

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots ,$$

où $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de nombres réels ou complexes et x est un nombre réel ou complexe.

3.1 Premières notions

On rappelle que $\mathbf{K}$ désigne indifféremment $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Définition 3.1.1 (Série entière) Une *série entière* est une série de fonctions dont le terme général u_n est de la forme $u_n(x) = a_n x^n$, où $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite dans $\mathbf{K}$ et $x \in \mathbf{K}$. On écrira z au lieu de x si nous considérons cette série dans le plan complexe.

On notera $\sum_n a_n x^n$ ou $\sum_n a_n z^n$ une série entière.

3.1.1 Rayon de convergence, disque de convergence d'une série entière

Nous allons voir que les séries entières ont un ensemble de convergence d'une forme particulièrement simple. Le résultat fondamental concernant les séries entières est le *Lemme d'Abel*.

Théorème 3.1.2 ***(Lemme d'Abel)*** *Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entiére. Supposons que, pour $z_0 \in \mathbf{C}^*$, le terme général est borné : il existe M tel que $|a_n z_0^n| \leq M$ pour tout n. Alors :*
(i) pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum_n a_z z^n$ est absolument convergente ;
(ii) pour tout nombre r tel $0 < r < |z_0|$, la série entière est normalement dans le disque fermé $\overline{D_r} = \{z \in \mathbf{C} \,:\, |z| \leq r\}$.

Démonstration (i) Pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| \leq |z_0|$, on a, pour tout n,

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \frac{|z^n|}{|z_0^n|} \leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n .$$

Comme $\dfrac{|z|}{|z_0|} < 1$, la série $\sum_n |z/z_0|^n$ est convergente et la série $\sum_n |a_z z^n|$ l'est également.
(ii) Pour tout z tel que $|z| \leq r < |z_0|$, on a, pour tout n,

$$|a_n z^n| \leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n .$$

Comme la série $\sum_n \left(\dfrac{r}{|z_0|}\right)^n$ est convergente, la série entière est normalement dans le disque fermé $\overline{D_r}$.■

Théorème 3.1.3 ***(Rayon de convergence)*** *Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entiére. Soit $R = \sup\{r \geq 0 \,:\,$ la suite $(|a_n| r^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée$\}$. Alors R est l'unique unique nombre dans $[0, +\infty]$ avec les propriétés suivantes :*
- *(i) si $|z| < R$, la série $\sum_n a_n z^n$ est absolument convergente ;*
- *(ii) si $|z| > R$, la série $\sum_n a_n z^n$ diverge ;*
- *(iii) pour tout $r \in \mathbf{R}^*$ avec $r < R$, la série est normalement convergente sur le disque fermé $\overline{D}_r$.*

Démonstration Montrons d'abord l'unicité de $R \in [0, +\infty]$ avec les propriétés (i) et (ii) ; supposons qu'il existe deux nombres $R_1 < R_2 \in [0, +\infty]$. Soit r tel que $R_1 < r < R_2$. Alors la série $\sum_n a_n r^n$ converge, par (i) et diverge par (ii), ce qui est absurde.

Soit

$$B = \{r \geq 0 : \text{ la suite } (|a_n| r^n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est bornée}\}.$$

L'ensemble B est non vide, car $0 \in B$. De plus, $B \subset \mathbf{R}^*$. Donc $R = \sup B$ existe bien dans bien $[0, +\infty]$.

De plus, il est clair que si $r \in B$, alors $r' \in B$ pour tout $r' \leq r$. On a donc $B = [0, R]$ ou $B = [0, R[$. Montrons que R possède les propriétés du théorème.

Montrons d'abord (ii). Soit $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| > R$. Alors $|z| \notin B$, par définition de B; ceci signifie que la suite $(|a_n||z|^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est non bornée et, *a fortiori*, ne tend pas vers 0. Par suite, la série $\sum_n a_n z^n$ diverge.

Montrons maintenant (iii). Soit $r \in \mathbf{R}^*$ avec $0 \leq r < R$. Fixons r_0 tel que $r < r_0 < R$. Alors $r_0 \in B$ et donc, par définition de B, la suite $(|a_n|r_0^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. Par le lemme d'Abel (Théorème 3.1.2.ii), la série $\sum_n a_z z^n$ est normalement convergente sur le disque fermé $\overline{D}_r$.

Pour montrer (i), soit $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < R$. Choisissons $r \in \mathbf{R}^*$ avec $|z| \leq r < R$. Nous venons de voir que la série est normalement convergente dans $\overline{D}_r$. Comme $z \in \overline{D}_r$, la série $\sum_n a_n z^n$ est bien convergente.■

Définition 3.1.4 (Rayon et disque de convergence d'une série entière) Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entiére. Le nombre $R \in [0, +\infty]$ introduit au Théorème 3.1.3 est appelé le *rayon de convergence* de la série. Le disque *ouvert*

$$D_R = \{z \in \mathbf{C} \, : \, |z| < R\}$$

d'appelle le *disque de convergence* de la série

Remarque 3.1.5 (i) Le plan $\mathbf{C}$ est divisé en trois parties deux à deux disjointes :

- le disque de convergence $D_R = \{z \in \mathbf{C} \, : \, |z| < R\}$: la série converge (absolument) pour chaque $z \in D_R$;
- le complementaire du disque fermé $\overline{D}_R$, c-à-d l'ensemble $\{z \in \mathbf{C} \, : \, |z| > R\}$: pour tout $|z| > R$, la série est non seulement divergente, mais son terme général est non borné ;
- le cercle $\{z \in \mathbf{C} \, : \, |z| = R\}$: pour $|z| = R$, la série *peut ou non* converger (voir Exemple 3.1.6 plus loin).

(ii) On peut avoir $R = 0$ ou $R = +\infty$ (voir Exemple 3.1.11 plus loin). Dans le premier cas, la série ne converge que pour $z = 0$ et, dans le second, elle converge pour tout $z \in \mathbf{C}$ et converge normalement dans tout disque D_r pour $r > 0$.

Exemple 3.1.6 (i) La série géométrique $\sum_n z^n$ est absolument convergente pour $|z| < 1$ et divergente pour $|z| > 1$. Son rayon de convergence est donc $R = 1$. On observera que, pour tout z tel que $|z| = 1$, la suite $(z^n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne tend pas vers 0 et il s'ensuit que la série diverge.
(ii) Considérons la série $\sum_n z^n/n$. Il est clair qu'elle est absolument convergente pour $|z| < 1$. Pour $|z| > 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} |z|^n/n = +\infty$ et il s'ensuit que la série diverge. Le rayon de convergence est donc $R = 1$.

La série diverge pour $z = 1$; elle converge pour $z = -1$ (par le critère de Leibniz ; voir 3.5.1). En fait, on peut monter qu'elle converge pour tout $|z| = 1$ avec $z \neq 1$.
(iii) Considérons la série $\sum_n z^n/n^2$. Comme $\sum_n 1/n^2$ est convergente et comme

$$\frac{|z|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \qquad \text{pour tout} \quad |z| \leq 1,$$

la série est absolument convergente pour $|z| \leq 1$.

Pour $|z| > 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} |z|^n/n^2 = +\infty$ et il s'ensuit que la série diverge. Le rayon de convergence est donc $R = 1$. On observera que, pour tout z tel que $|z| = 1$, la série est (absolument) convergente.
(iv) Nous verrons plus tard (voir Exemples 3.1.11) des exemples de séries entières avec $R = +\infty$ ou $R = 0$.

3.1.2 Calcul du rayon de convergence : formule d'Hadamard, règle de d'Alembert

Nous commençons par rappeller deux critères bien connus de convergence des séries numériques.

Remarque 3.1.7 (i) **Rappel (Règle de Cauchy) :** Soit $\sum_n u_n$ une série de terme général $u_n \geq 0$. Soit $L := \limsup_n u_n^{1/n}$. Si $L < 1$, la série $\sum_n u_n$ converge. Si $L > 1$, la série $\sum_n u_n$ diverge.
(ii) **Rappel (Règle de d'Alembert) :** Soit $\sum_n u_n$ une série de terme général $u_n > 0$. Supposons que $L := \lim_{n\to+\infty} u_{n+1}/u_n$ existe. Si $L < 1$, la série $\sum_n u_n$ converge. Si $L > 1$, la série $\sum_n u_n$ diverge.

Théorème 3.1.8 ***(Formule d'Hadamard)*** *Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entiére. Soit $L = \limsup_n |a_n|^{1/n} \in [0, +\infty]$. Le rayon de convergence de la série entière est $R = 1/L$, avec la convention $1/+\infty = 0$ et $1/0 = +\infty$.*

Démonstration Supposons que $L < +\infty$. Pour tout $z \in \mathbf{C}$, on a

$$\limsup_n |a_n z^n|^{1/n} = |z| \limsup_n |a_n|^{1/n} = |z|L$$

Si $|z| < \dfrac{1}{L}$ (avec la convention $\dfrac{1}{0} = +\infty$), alors $|z|L < 1$ et la série $\sum_n a_n z^n$ est absolument convergente, par la règle de Cauchy rappelée plus haut (Remarque 3.1.7.i). Par cette même règle, si $|z| > \dfrac{1}{L}$, alors $|z|L > 1$ et la série $\sum_n a_n z^n$ est divergente. Donc $\dfrac{1}{L}$ est bien le rayon de convergence si $L < +\infty$.

Supposons maintenant que $L = +\infty$ et montrons que $R = 0$. Soit $z \in \mathbf{C}, z \neq 0$. Comme $L = \limsup_n |a_n|^{1/n}$, on a alors

$$\limsup_n |a_n z^n|^{1/n} = |z| \limsup_n |a_n|^{1/n} = +\infty.$$

Le critère de Cauchy montre que la série $\sum_n a_n z^n$ est divergente. La série entière ne converge donc que pour $z = 0$ et ceci signifie que $R = 0$.■

En utilisant la règle de d'Alembert rappelée plus haut (Remarque 3.1.7.i), on a une formule analogue

Théorème 3.1.9 ***(Formule d'Hadamard-d'Alembert)*** *Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entiére avec $a_n \neq 0$ pour tout n. On suppose que $L := \lim_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \in [0, +\infty]$ existe. Le rayon de convergence de la série entière est $R = \dfrac{1}{L}$, avec la convention $\dfrac{1}{+\infty} = 0$ et $\dfrac{1}{0} = +\infty$.*

Démonstration Soit $z \in \mathbf{C}^*$. Supposons d'abord que $L < +\infty$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = |z| \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |z|L$$

Si $|z| < \dfrac{1}{L}$, on a $|z|L < 1$, on a donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} > 1$ et la série $\sum_n a_n z^n$ est absolument convergente, par la règle de d'Alembert. Par cette même règle, la série $\sum_n a_n z^n$ est divergente si $|z| < \dfrac{1}{L}$. On a donc bien $R = 1/L$.

Soit $L = +\infty$ et $z \neq 0$; alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = +\infty$ et la série diverge (règle de d'Alembert). On a donc bien $R = 0 = 1/L$■.

Remarque 3.1.10 Dans la pratique, on utilise souvent la règle de d'Alembert ; cette règle est cependant inappliquable dans de nombreux cas (voir Exemple 3.1.11.iii plus bas).

Exemple 3.1.11 (i) La série $\sum_n \dfrac{z^n}{n!}$ a comme rayon de convergence $R = +\infty$, c-à-d qu'elle est convergente, et même absolument convergente, pour tout $z \in \mathbf{C}$. En effet, appliquons-lui la règle de d'Alembert :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Par suite, $R = +\infty$.
(ii) La série $\sum_n n!z^n$ a comme rayon de convergence $R = 0$, c-à-d qu'elle ne converge que pour $z = 0$. En effet, appliquons-lui la règle de d'Alembert :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to+\infty} n + 1 = +\infty.$$

Par suite, $R = 0$.
(iii) On considère la série

$$\sum_n z^{2^n} = 1 + z + z^2 + z^4 + z^8 + z^{16} + z^{32} + \cdots .$$

Son terme général est donc $a_n = 1$ si n est une puissance de 2 et $a_n = 0$ sinon. La règle de d'Alembert n'est pas appliquable ici. Cependant, on a $\limsup_n |a_n|^{1/n} = 1$ et donc $R = 1$.
(iv) **(Série du binôme)** Soit $s \in \mathbf{C}$ fixé. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$\binom{s}{n} = \frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!}.$$

et on considère la série $\sum_n \binom{s}{n} z^n$.

Deux cas sont à distinguer :

- s est un entier positif ; alors $\binom{s}{n} = 0$ pour $n > s$. La série se réduit donc au polynôme

$$\sum_{n=0}^{s} \binom{s}{n} z^n = (1+z)^s \qquad \text{pour tout} \quad z \in \mathbf{C}.$$

- s n'est pas un entier positif ; alors $\binom{s}{n} \neq 0$ pour tout n. Appliquons la règle de d'Alembert :

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \binom{s}{n+1} / \binom{s}{n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{s-n}{n+1} \right| = 1.$$

Le rayon de convergence de la série est donc $R = 1$.

On notera la conséquence suivante de la convergence de la série du binôme pour $|z| < 1$.

Corollaire 3.1.12 *Pour tout $s \in \mathbf{C}$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \binom{s}{n} z^n = 0 \qquad \textit{pour tout} \quad |z| < 1. \blacksquare$$

3.1.3 Continuité d'une série entière dans son disque de convergence

La somme d'une série entière de rayon R est la limite $s = \lim_{n\to+\infty} S_n$ de ses sommes partielles et est définie sur son disque de convergence ouvert $D_R = \{z \in \mathbf{C} \,:\, |z| < R\}$.

Théorème 3.1.13 ***(Continuité de la somme d'une série)*** *Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Sa somme est une fonction $S : D_R \to \mathbf{C}$* continue *sur le disque de convergence ouvert D_R.*

Démonstration Soit $z_0 \in D_R$. Choisissons $r > 0$ tel que $|z_0| < r < R$. Par le Théorème 3.1.3, la série $\sum_n a_n z^n$ est normalement convergente sur le disque D_r. Elle est donc uniformément convergente sur D_r (Théorème 2.3.3). Par conséquent, sa somme S est continue dans D_r (Théorème 2.5.1). En particulier, elle est continue en z_0. $\blacksquare$

3.2 Opérations sur les séries entières

3.2.1 Somme, produits de séries entières

Théorème 3.2.1 ***(Somme de séries entières)*** *Soient $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs $R_1 > 0$ et $R_2 > 0$ et* *de sommes respectives s_1 et s_2. Alors le rayon de convergence R de la série $\sum_n (a_n+b_n)z^n$ vérifie $R \geq \min\{R_1, R_2\}$ et sa somme est s_1+s_2 sur le disque ouvert de rayon* $\min\{R_1, R_2\}$

Démonstration Soit $|z| < \min\{R_1, R_2\}$. Alors, comme $|z| < R_1$ et $|z| < R_2$, les séries de terme général $a_n z^n$ et $b_n z^n$ sont absolument convergentes ; comme

$$|(a_n + b_n)z^n| \leq |a_n z^n| + |b_n z^n| \qquad \text{pour tout} \quad n \in \mathbf{N},$$

il s'ensuit que la série de terme général $(a_n + b_n)z^n$ est convergente. On en conclut que $\min\{R_1, R_2\} \leq R$. De plus, pour tout $|z| < \min\{R_1, R_2\}$, on a $\sum_n (a_n + b_n)z^n = \sum_n a_n z^n + \sum_n b_n z^n$.■

Remarque 3.2.2 Il est clair que, dans le théorème précédent, on peut avoir $R > \min\{R_1, R_2\}$: prendre par exemple $a_n = 1$ et $b_n = -1$ pour tout n. Cependant, si $R_1 \neq R_2$, alors on a nécessairement l'égalité $R = \min\{R_1, R_2\}$ (voir Exercice 3.12.4).

Remarque 3.2.3 (Rappel : Le produit de Cauchy de deux séries numériques) On considère deux séries *absolument* convergentes de terme général a_n et b_n (avec $a_n, b_n \in \mathbf{K}$), de somme s_1 et s_2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0.$$

Alors la série de terme général c_n est absolument convergente et sa somme est le produit $s_1 s_2$. Cette série est appelée le *produit de Cauchy* des deux séries considérées.

Théorème 3.2.4 ***(Produit de séries entières)*** *Soient $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs $R_1 > 0$ et R_2 et de sommes respectives s_1 et s_2. Alors le rayon de convergence R de la série $\sum_n c_n z^n$, avec $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, vérifie $R \geq \min\{R_1, R_2\}$ et sa somme est $s_1 s_2$ sur le disque ouvert de rayon* $\min\{R_1, R_2\}$

Démonstration Soit $|z| < \min\{R_1, R_2\}$. Alors, comme plus haut, les séries de terme général $a_n z^n$ et $b_n z^n$ sont absolument convergentes. Il s'ensuit que le produit de Cauchy de ces deux séries est convergent (voir le rappel Remarque 3.2.3 plus haut), de somme égal au produit des sommes de ces séries. Le terme général de ce produit de Cauchy est

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k b_{n-k} z^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} z^n = c_n z^n.$$

L'assertion en découle. ■

3.3 Dérivation, intégration d'une série entière

Nous aurons besoin du résultat suivant portant sur les limites supérieures de suites de nombres positifs.

Lemme 3.3.1 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels positifs. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un nombre réel $u > 0$. Alors, on a*

$$\limsup_n (u_n v_n) = u \limsup_n v_n$$

(avec la convention $u \times (+\infty) = +\infty$).

Démonstration Posons $v = \limsup_n v_n \in [0, +\infty]$. On rappelle que

$$\limsup_n v_n = \lim_{n\to+\infty} \sup\{v_k : k \geq n\}.$$

On veut montrer que $uv = \limsup_n (u_n v_n)$, c-à-d que

$$\lim_{n\to+\infty} \sup\{u_k v_k : k \geq n\} = uv.$$

Supposons d'abord que $v < +\infty$, c-à-d que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. Alors $(u_n v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est également bornée. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $u > 0$, on peut supposer que $\varepsilon < u$. Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = u$, il existe N tel que $u - \varepsilon \leq u_n \leq u + \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Comme $u - \varepsilon > 0$, on a alors, pour tout $n \geq N$,

$$\begin{aligned}(u-\varepsilon)\sup\{v_k : k \geq n\} &= \sup\{(u-\varepsilon)v_k : k \geq n\} \leq \sup\{u_k v_k : k \geq n\} \\ &\leq \sup\{(u+\varepsilon)v_k : k \geq n\} = (u+\varepsilon)\sup\{v_k : k \geq n\}\end{aligned}$$

et donc

$$(u-\varepsilon)\sup\{v_k : k \geq n\} \leq \sup\{u_k v_k : k \geq n\} \leq (u+\varepsilon)\sup\{v_k : k \geq n\};$$

en passant à la limite $n \to +\infty$, on obtient

$$(u-\varepsilon)v \leq \limsup_n u_n v_n \leq (u+\varepsilon)v.$$

En faisant $\varepsilon \to 0$, il s'ensuit que $uv = \limsup_n u_n v_n$.

Supposons maintenant que $v = +\infty$, c-à-d $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Il s'agit de montrer qu'on a aussi $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$. Ceci est clair, car $\lim_n u_n = u > 0$.■

Définition 3.3.2 (Série dérivée) On appelle *série dérivée* de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la série entière

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1} = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots .$$

Théorème 3.3.3 ***(Rayon de convergence de la série dérivée)*** *Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Sa série dérivée a également R comme rayon de convergence.*

Démonstration Soit R' le rayon de convergence de la série dérivée. Par la formule d'Hadamard (Théorème 3.1.8), on a $1/R = \limsup_n |a_n|^{1/n}$ et $1/R' = \limsup_n |na_n|^{1/n}$. Il suffit donc de montrer que $\limsup_n |a_n|^{1/n} = \limsup_n n^{1/n}|a_n|^{1/n}$. Comme il est bien connu que $\lim_{n\to+\infty} n^{1/n} = 1$, ceci découle du Lemme 3.3.1 ■.

Dans tout ce qui suit et jusquà la fin du paragraphe, nous nous limiterons au cas où la variable est *réelle* ; nous noterons x cette variable. Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière. Par les résutats qui précèdent, une telle série est absolument convergente sur un intervalle $]-R, R[$ et divergente pour tout $|x| > R$. On ne peut rien dire de général pour $x = \pm R$. Les sommes partielles de cette série sont les polynômes $S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$; la dérivée de S_n' est la fonction $x \mapsto \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}$ qui est la n-ième somme partielle de la série dérivée.

Théorème 3.3.4 ***(Dérivée d'une série entière d'une variable réelle)*** *Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière d'une variable réelle, de rayon de convergence R et de somme s. Alors $s :]-R, R[\to \mathbf{K}$ est dérivable et sa dérivée s' est la série entière dérivée $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.*

Démonstration Pour tout $r < R$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge normalement sur l'intervalle $[-r, r]$ (Théorème 3.1.3) et donc uniformément sur cet intervalle (Théorème 2.3.3). La série dérivée possède le même rayon de convergence (Théorème 3.3.3). Elle converge également uniformément sur $[-r, r]$. Par le Théorème 2.5.5, il s'ensuit que s est dérivable sur $[-r, r]$ et que s' est la somme de la série dérivée sur $[-r, r]$. Ceci étant vrai pour tout $r < R$, le théorème en découle.■

Corollaire 3.3.5 ***(Une série entière est indéfiniment dérivable)*** *Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière d'une variable réelle, de rayon de convergence R et de somme s. Alors $s :]-R, R[\to \mathbf{K}$ est indéfiniment dérivable, sa k-ième dérivée $s^{(k)}$ est la somme de la série entière*

$$\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}$$

qui a même rayon de convergence R.

Démonstration On procède par récurrence sur $k \in \mathbf{N}$ pour montrer que s est k-fois dérivable, que $s^{(k)}$ est la somme de la série entière

$$\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-1}$$

et que le rayon de convergence de cette série est R. Le cas $k = 0$ étant évident (car $s^{(0)} = s$), supposons l'assertion vraie pour $k \geq 0$. Le Théorème 3.3.4 appliqué à la série $\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}$ montre alors que $s^{(k)}$ est dérivable, que sa dérivée est la série

$$\sum_{n=k+1}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)a_n x^{n-(k+1)}$$

et que le rayon de convergence de cette dernière série est R.■

Corollaire 3.3.6 ***(Coefficients d'une série entière)*** *Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de somme S. Alors $a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$, pour tout $n \geq 0$.*

Démonstration Le Corollaire 3.3.5 précédent montre que le terme constant de la série correspondant à $S^{(n)}$ est $n!a_n$; comme ce terme constant est égal à $S^{(n)}(0)$, l'assertion s'ensuit.■

Ce corollaire a comme conséquence importante l'unicité des coefficients d'une série entière.

Corollaire 3.3.7 ***(Unicité des coefficients d'une série entière)*** *Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ deux séries entières, de rayons de convergence R_1 et R_2 et de sommes S_1 et S_2. On suppose qu'il existe $0 < r \leq \min\{R_1, R_2\}$ tel que $S_1(x) = S_2(x)$ pour tout $x \in]-r, r[$. Alors $a_n = b_n$ pour tout $n \geq 0$.*

Démonstration Soit $n \in \mathbf{N}$. On a $S_1(x) = S_2(x)$ et donc $S_1^{(n)}(x) = S_2^{(n)}(x)$ pour tout $x \in]-r, r[$; en particulier, on a $S_1^{(n}(0) = S_2^{(n)}(0)$ et le corollaire précédent montre alors que $a_n = b_n$.■

Soit S_n la n-ième somme partielle d'une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$; alors, pour tout x, on a

$$\int_0^x S_n(t)dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Théorème 3.3.8 ***(Primitive d'une série entière d'une variable réelle)*** *Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière d'une variable réelle, de rayon de convergence R et de somme S. La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ a le même rayon de convergence R. De plus, pour tout $x \in]-R, R[$, on a*

$$\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Démonstration Soit R' le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$. Par la formule d'Hadamard (Théorème 3.1.8), on a

$$\frac{1}{R'} = \limsup_n \left| \frac{a_n}{n+1} \right|^{1/n} = \limsup_n \frac{1}{(n+1)^{1/n}} |a_n|^{1/n}.$$

Comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{(n+1)^{1/n}} = 1$, il découle du Lemme 3.3.1 que $1/R' = \limsup_n |a_n|^{1/n} = 1/R$ et donc $R' = R$. Soit $x \in]-R, R[$. La n-ième somme partielle S_n de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge uniformément sur $[-x, x]$. On conclut alors avec le Corollaire 2.5.4.■

3.4 Développement d'une fonction en série entière

Jusquà présent, nous sommes parti d'une série entière et nous avons étudié la fonction donnée par la somme de cette série sur l'intervalle (ou le disque) de convergence. Dans cette section, nous partons d'une fonction $f : D \to \mathbf{K}$ (d'une variable réelle ou complexe) définie sur un disque ou un intervalle ouvert autour de 0; nous examinons la question du "développement" de f en série entière : peut-on trouver une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ dont f soit la somme ? Quand cela sera le cas, l'égalité $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ne sera vraie sur une partie de l'ensemble de définition D de f.

Définition 3.4.1 (Fonction développable en série entière) Soient D un disque ouvert dans $\mathbf{C}$ ou un intervalle ouvert dans $\mathbf{R}$ autour de 0 et $f : D \to \mathbf{K}$ une fonction. On dit que f est développable en série entière autour de 0 s'il existe une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et de somme s telle que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in D$ avec $|x| < R$. On dit que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *représente* f sur $D \cap D_R$.

Exemple 3.4.2 (i) La fonction $f : \mathbf{C} \setminus \{1\} \to \mathbf{C}$ avec $f(z) = 1/(1-z)$ est développable en série entière autour de 0 : la série entière $\sum_n z^n$ a un rayon de convergence égal à 1 et $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ pour $|z| < 1$.
(ii) La fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ avec $f(x) = 1/(1+x^2)$ est développable en série entière autour de 0 : la série entière $\sum_n (-1)^n x^{2n}$ a un rayon de convergence égal à 1 et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$ pour $|x| < 1$.

Dans tout ce qui suit et jusqu'à la fin du paragraphe, nous nous limiterons au cas où la variable est *réelle* ; comme d'habitude, nous la noterons x

Théorème 3.4.3 ***(Fonction développable en série entière)*** *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ contenant 0 et soit $f : I \to \mathbf{K}$ une fonction. développable en une série entière autour de 0 de rayon de convergence $R > 0$. Alors f est indéfiniment dérivable dans l'intervalle $]-R, R[\cap I$. De plus, le terme général de cette série est $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.*

Démonstration Soit $\sum_n a_n x^n$ la série entière représentant f dans $]-R, R[\cap I$ et soit s sa somme. Par le Corollaire 3.3.5, s est dérivable dans $]-R, R[\cap I$; donc f est dérivable dans $]-R, R[$. Par le Corollaire 3.3.6, on a

$$a_n = \frac{s^{(n)}(0)}{n!} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}. \blacksquare$$

Définition 3.4.4 (Série de Taylor d'une fonction) Soit $f : I \to \mathbf{K}$ une fonction indéfiniment dérivable dans un intervalle I autour de 0. La série entière de terme général $\sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ s'appèlle la *série de Taylor* de f.

Remarque 3.4.5 Si f est paire, on a $f^{(2n+1)}(0) = 0$; la série de Taylor de f ne fait donc intervenir que les puissances paires de x. Si f est impaire, on a $f^{(2n)}(0) = 0$; la série de Taylor de f ne fait donc intervenir que les puissances impaires de x.

Remarque 3.4.6 Etant donnée une fonction $f : I \to \mathbf{K}$ définie dans un intervalle I autour de 0, demandons-nous si f admet un développement en série entière. Une condition nécéssaire pour qu'il en soit ainsi est que f soit indéfiniment dérivable dans un intervalle autour de 0 (voir Théorème 3.4.3). Supposons que cela est le cas. L'unique série entière qui pourrait représenter f est sa série de Taylor $\sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$. Cela sera le cas si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(C1) La série de Taylor $\sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ de f possède un rayon de convergence $R > 0$

(C2) La somme de la série de Taylor est égale à f sur un intervalle autour de 0.

Comme les exemples suivants (Exemples 3.4.7) le montrent, la condition (C1) peut ne pas être satisfaite ; de plus, même si elle est satisfaite, la condition (C2) peut ne pas l'être. Cependant, nous verrons de nombreux exemples (voir § 3.5) où les deux conditions sont satisfaites.

Exemple 3.4.7 (i) **(Exemple d'une fonction C^∞ non développable en série entière)** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Montrons que f est indéfiniment dérivable et $f^{(n)}(0) = 0$. Ceci impliquera que la série de Taylor de f est identiquement nulle et ne peut donc représenter f dans aucun intervalle autour de f. Pour cela, montrons, par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$, que f est n-fois dérivable et qu'il existe des polynômes P_n tels que

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n(1/x)e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Il est clair que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}^*$. Comme $\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2} = 0$, f est continue en 0 et le cas $n = 0$ en découle. Supposons l'assertion vraie pour n. Soit $x > 0$; alors, par hypothèse de récurrence,

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}(P_n(1/x)e^{-1/x^2}) = \left(-P_n'(1/x)\frac{1}{x^2} + 2P_n(1/x)\frac{1}{x^3}\right) e^{-1/x^2}.$$

Si on pose $P_{n+1}(t) := -P_n'(t)t^2+2P_n(t)t^3$, on a bien $f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(1/x)e^{-1/x^2}$.

Soit $x < 0$; alors $f^{(n)}(y) = 0$ pour tout $y < 0$ et on a bien $f^{(n+1)}(x) = 0$.

Soit maintenant $x = 0$; on a $f^{(n+1)}(0) = \lim_{y\to 0} \frac{f^{(n)}(y)-f^{(n)}(0)}{y}$. Pour la limite à gauche, on a trivialement

$$\lim_{y\to 0-} \frac{f^{(n)}(y) - f^{(n)}(0)}{y} = 0.$$

D'autre part, pour la limite à droite, on a

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 0+} \frac{f^{(n)}(y) - f^{(n)}(0)}{y} &= \lim_{y\to 0+} \frac{P_n(1/y)e^{-1/y^2}}{y}\\ &= \lim_{t\to +\infty} tP_n(t)e^{-t^2}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $f^{(n+1)}(x) = 0$.

(ii) **(Exemple d'une série de Taylor divergente)** On considère la série de fonctions de terme général

$$u_n : \mathbf{R} \to \mathbf{C}, \qquad u_n(x) = e^{-n}e^{in^2x}.$$

Chaque u_n est indéfiniment dérivable et sa k-ième dérivée est donnée par

$$u_n^{(k)}(x) = e^{-n}i^k n^{2k}e^{in^2x} \qquad \text{pour tout} \quad x \in \mathbf{R}.$$

On a donc

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |u_n^{(k)}(x)| \leq e^{-n}n^{2k} = \frac{n^{2k}}{e^n};$$

comme la série $\sum_n \frac{n^{2k}}{e^n}$ est convergente, la série de terme général $u_n^{(k)}$ est normalement et donc uniformément convergente sur $\mathbf{R}$. Il s'ensuit (Théorème 2.5.5) que la somme $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C}$ de la série $\sum_n u_n$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$ et que

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} i^k n^{2k} e^{in^2 x} \qquad \text{pour tout} \quad x \in \mathbf{R}.$$

En particulier, on a, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$(*) \qquad f^{(k)}(0) = i^k \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} n^{2k}.$

Montrons que le rayon de convergence de la série de Taylor $\sum_k \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ est $R = 0$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que $R > 0$. Soit alors $x \in \mathbf{R}$ avec $0 < x < R$. Alors, la série $\sum_k \frac{f^{(k)}}{k!}(0) x^k$ est *absolument* convergente par le Théorème 3.1.3. La série de terme général $\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} x^k$ est donc convergente. D'autre part, pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a, en utilisant $(*)$,

$$\begin{aligned}
\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} x^k &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} n^{2k} \frac{x^k}{k!} \\
&\geq e^{-k} k^{2k} \frac{x^k}{k!} \geq e^{-k} k^{2k} \frac{x^k}{k^k} \\
&= e^{-k} k^k x^k = (ak)^k,
\end{aligned}$$

avec $a = \dfrac{x}{e} > 0$. Or $\lim_{k\to+\infty} a^k k^k = \lim_{k\to+\infty} e^{k(\log a + \log k)} = +\infty$, Ceci est en contradiction avec la convergence de la série $\sum_k \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} x^k$.

3.4.1 Critère de développement en série entière

La formule de Taylor-Maclaurin va nous fournir un critère pour qu'une fonction indéfiniment dérivable sur un intervalle autour de 0 soit développable en série entière.

Remarque 3.4.8 Rappel (Formule de Taylor-Maclaurin) :
Soit $f :]-r, r[\to \mathbf{K}$ une fonction indéfiniment dérivable. Alors, pour tout $x \in]-r, r[$ et tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

En particulier, on a

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

pour toute constante $M = M_{n,x}$ majorant $|f^{(n+1)}|$ sur l'intervalle d'extrémités 0 et x.

Théorème 3.4.9 *Soit $f :]-r, r[\to \mathbf{K}$ une fonction indéfiniment dérivable. Supposons que, pour tout $x \in]-r, r[$, il existe un majorant $M_{n,x}$ de $|f^{(n+1)}|$ sur l'intervalle d'extrémités 0 et x tel que*

$$\lim_{n\to\infty} M_{n,x} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Alors la série de Taylor $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ a un rayon de convergence $R \geq r$ et est égale à f sur $]-r, r[$.

Démonstration Soit $x \in]-r, r[$. En tenant compte de la formule de Taylor-Maclaurin rappelée plus haut (Remarque 3.4.8), l'hypothèse implique aue

$$\lim_{n\to+\infty} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| = 0.$$

Ceci montre que la série de Taylor de f en x converge vers $f(x)$. Il s'ensuit que $R \geq |x|$ (voir Théorème 3.1.3). Comme ceci est valable pour tout $x \in]-r, r[$, on a $R \geq r$ et f est égale à série de Taylor sur $]-r, r[$.■

3.5 Développements en série des fonctions usuelles

3.5.1 La fonction exponentielle

Soit $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ la fonction exponentielle ; on rappelle que $f^{(n)}(x) = f(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Dans l'intervalle d'extrémités 0 et x, la fonction $|f^{(n)}|$ est donc majorée par $e^{|x|}$. On a, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = e^{|x|} \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

car $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. On en conclut que la fonction exponentielle est égale à sa série de Taylor sur $\mathbf{R}$ tout entier :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \qquad \text{pour tout} \quad x \in \mathbf{R}$$

et que le rayon de convergence de cette série est $R = +\infty$ (ce dernier point a déjà été vu : voir Exemple 3.1.11.i).

3.5.2 Les fonctions hyperboliques

On rappelle que le cosinus hyperbolique et le sinus hyperbolique sont les fonctions cosh et sinh sur $\mathbf{R}$ définies par

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Comme (voir plus haut)

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots ,$$

il s'ensuit que

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \qquad \text{pour tout} \quad x \in \mathbf{R}$$

et que

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \qquad \text{pour tout} \quad x \in \mathbf{R}$$

3.5.3 Les fonctions trigonométriques

Soit $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ la fonction cosinus ; on rappelle que $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \sin x$ et $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. En particulier, $f^{(2n+1)}(0) = 0$ et $f^{(2n)}(0) = (-1)^n$. La série de Taylor correspondante est donc $\sum_n \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$. Dans l'intervalle d'extrémités 0 et x, la fonction $|f^{(2n+1)}|$ est majorée par 1 et on a $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$. On en conclut que la fonction cosinus est égale à sa série de Taylor sur $\mathbf{R}$ tout entier :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \qquad \text{pour tout} \quad x \in \mathbf{R}$$

et que le rayon de convergence de cette série est $R = +\infty$.

De manière similaire, on trouve pour la fonction sinus que sa série de Taylor est $\sum_n \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, que son rayon de convergence est $R = +\infty$ et qu'elle représente la fonction sinus sur $\mathbf{R}$ tout entier :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \qquad \text{pour tout} \quad x \in \mathbf{R}$$

3.5.4 La fonction logarithme

On considère la série de terme général $(-1)^n x^n$. son rayon de convergence est égal à 1 et, pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}.$$

Par le théorème sur les primitives de séries entières (Théorème 3.3.8), on a donc, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

Comme

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \log(1+x) - \log 1 = \log(1+x),$$

il vient que

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \cdots \qquad \text{pour tout} \quad x \in]-1,1[.$$

Remarque 3.5.1 (i) La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ converge également en $x = 1$ (par le critère de Leibniz sur les séries alternées ; voir rappel plus bas). Il se trouve que le développement de $x \mapsto \log(1+x)$ vu précédemment est encore valable pour $x = 1$ et donne :

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots.$$

La preuve de ce fait est basée sur un théorème d'Abel et sera donnée plus tard (voir Exemple 3.11.6).

(ii) **Rappel (Critère de Leibniz) :** Soit (v_n) une suite *décroissante* de nombres réels positifs telle que $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$. Alors la série de terme général $(-1)^n v_n$ est convergente (pour la preuve, voir Exercice 2.6.22).

3.5.5 La fonction $x \mapsto \text{Arctg(x)}$

La série entière de terme général $(-1)^n x^{2n}$ possède un rayon de convergence égal à 1. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Par le théorème sur les primitives de séries entières (Théorème 3.3.8), on a donc, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$$

Comme

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \text{Arctg}(x) - \text{Arctg}(0) = \text{Arctg}(x),$$

il vient que

$$\text{Arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \qquad \text{pour tout} \quad x \in]-1,1[.$$

Remarque 3.5.2 La série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ converge également en $x=1$ et le développement de $x \mapsto \text{Arctg}(x)$ est encore valable en $x=1$; comme $\text{Arctg}1 = \frac{\pi}{4}$, on obtient ainsi la formule

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots\right).$$

La preuve de ce fait est basée sur un théorème d'Abel et sera donnée plus tard (voir Exemple 3.11.6).

3.5.6 La série du binôme

Soit $s \in \mathbf{R}$ fixé et considérons la fonction $f : x \mapsto (1+x)^s$. Nous voulons trouver le développement de f en série entière. Le cas où $s \in \mathbf{N}$ étant banal, nous supposerons que $s \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}$. Comme

$$f(x) = (1+x)^s = e^{s\log(1+x)},$$

la fonction f est définie pour $x \in]-1, +\infty[$. Elle est indéfiniment dérivable et on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$f^{(n)}(x) = s(s-1)(s-2)\cdots(s-n+1)(1+x)^{s-n} \qquad \text{pour tout} \quad x \in]-1, 1[.$$

La série de Taylor de f est donc la série du binoḿe $\sum_n \binom{s}{n} x^n$, étudiée dans Exemple 3.1.11.iv.

Soit $x \in]-1, 1[$. Par la formule de Taylor-Maclaurin avec reste intégral (voir (Remarque 3.4.8), on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} x^k + r_n(x)$$

avec un reste

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n s(s-1)\cdots(s-n)(1+t)^{s-n-1} dt \\ &= s\binom{s-1}{n} \int_0^x (x-t)^n (1+t)^{s-n-1} dt \\ &= s\binom{s-1}{n} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{s-1} dt \end{aligned}$$

La fonction homographique

$$\varphi : t \mapsto \frac{x-t}{1+t}$$

est décroissante sur l'intervalle $]-1, +\infty[$, car

$$\varphi'(t) = \frac{-1-x}{(1+t)^2} \leq 0.$$

De plus, on a $\varphi(0) = x$ et $\varphi(x) = 0$. Il s'ensuit que $\varphi(t) \leq |x|$ pour tout t dans l'intervalle d'extrémités 0 et x. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{s-1} dt \right| &\leq \int_0^x |x|^n (1+t)^{s-1} dt \\ &= |x|^n \int_0^x (1+t)^{s-1} dt, \end{aligned}$$

et donc
$$|r_n(x)| \leq \left| s\binom{s-1}{n} x^n \right| \int_0^x (1+t)^{s-1} dt.$$
D' autre part, on a
$$\lim_{n\to+\infty} \binom{s-1}{n} x^n = 0,$$
car la série de terme général $\binom{s-1}{n}x^n$ est convergente (voir Corollaire 3.1.12). Il s'ensuit que $\lim_{n\to+\infty} r_n(x) = 0$. On en conclut que la fonction f est égale à sa série de Taylor sur $]-1, 1[$:
$$(1+x)^s = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{s}{n} x^n \qquad \text{pour tout} \quad |x| < 1.$$

Nous allons étudier cette formule dans quelques cas particuliers.

Le cas $s = 1/2$: on a
$$\begin{aligned}\binom{s}{n} &= \frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!}\\ &= \frac{1\times(-1)\times(-3)\times\cdots\times(-2n+3)}{2^n n!}\\ &= (-1)^{n-1}\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-3)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n}.\end{aligned}$$
On obtient donc le développement
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-3)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n}x^n + \cdots$$
valable pour tout $x \in]-1, 1[$.

Le cas $s = -1/2$: on a
$$\begin{aligned}\binom{s}{n} &= \frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!}\\ &= \frac{(-1)\times(-3)\times(-5)\times\cdots\times(-2n+1)}{2^n n!}\\ &= (-1)^{n}\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n}.\end{aligned}$$
On obtient donc le développement
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n}\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n}x^n + \cdots$$
valable pour tout $x \in]-1, 1[$.

3.5.7 La fonction $x \mapsto \mathrm{Arcsin}(x)$

Reprenons le développement

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n} x^n + \cdots$$

valable pour tout $x \in]-1, 1[$. Soit $|x| < 1$. Alors $|-x^2| < 1$ et on a donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \cdots + \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n} x^{2n} + \cdots$$

D'autre part, on a

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \mathrm{Arcsin}(x) - \mathrm{Arcsin}(0) = \mathrm{Arcsin}(x),$$

Par le théorème sur les primitives de séries entières (Théorème 3.3.8), on obtient ainsi

$$\mathrm{Arcsin}(x) = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

pour tout $x \in]-1, 1[$.

3.6 Application à la résolution d'équations différentielles

On peut parfois trouver des solutions d'une équation différentielle au moyen de développements en série entière. On considère une équation différentielle du type

$$(*) \qquad p_r y^{(r)} + p_{r-1} y^{(r-1)} + \cdots + p_1 y' + p_0 y = b,$$

où $p_0, p_1, \ldots, p_r$ sont des polynômes et b une fonction développable en série entière de rayon $r > 0$

$$b(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

On cherche une solution $y = y(x)$ de l'équation $(*)$ sous la forme d'une série entière

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Méthode : Les dérivées successives de y sont des séries entières données par la formule (voir Corollaire 3.3.5)

$$y^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k} \qquad \text{pour tout} \quad k = 0, \ldots, r.$$

On reporte ces développements dans le membre de gauche de l'équation $(*)$, on regroupe les termes de même degré et on obtient une série entière de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n$. Les coefficients A_n sont des combinaisons linéaires des a_n et des coefficents des polynômes p_s. En identifiant cette série entière avec celle de b, on obtient les relations

$$A_n = b_n, \qquad \text{pour tout} \quad n \in \mathbf{N}.$$

Ces relations permettent de calculer les coefficients a_n, de proche en proche. Supposons que le rayon de convergence R de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est non nul. Cette série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est alors une solution de l'équation $(*)$ dans l'intervalle $]-t, t[$ pour $t = \min\{R, r\}$.

Exemple 3.6.1 Considèrons l'équation différentielle

$$xy''(x) + xy'(x) + y(x) = 1$$

et chechons une solution sous forme de série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On a

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$
$$y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

et donc

$$\begin{aligned} xy''(x) + xy'(x) + y(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left((n+1)n a_{n+1} + (n+1)a_n\right) xn. \end{aligned}$$

En identifiant cette série avec le membre de droite de l'équation différentielle, on obtient les relations

$$\begin{aligned} &a_0 = 1 \\ &(n+1)na_{n+1} + (n+1)a_n = 0 \qquad \text{pour tout} \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

c-à-d $a_0 = 1$ et

$$a_{n+1} = -\frac{a_n}{n} \qquad \text{pour tout} \quad n \geq 1.$$

Avec $a_1 = a$ arbitraire, on trouve par récurrence

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{a}{(n-1)!} \qquad n \geq 1.$$

La série entière correspondante à un rayon de convergence $r = +\infty$. Une solution de l'équation est donc

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 + a\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}x^n \\ &= 1 + a\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}x^{n+1} \\ &= 1 + ax\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}x^n \\ &= 1 + axe^{-x}. \end{aligned}$$

On observera que, comme l'équation différentielle est linéaire d'ordre 2, il y a une autre famille de solutions, qui, elles, ne sont pas développables en série entière autour de 0.

3.7 Fonction exponentielle complexe

Nous avons vu (§ 3.5.1) que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on avait $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$. Nous savons d'autre part (Exemple 3.1.11.i) que la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$ est convergente pour tout nombre complexe z. Par extension du cas d'une variable réelle, nous définissons l'exponentielle complexe.

Définition 3.7.1 (Fonction exponentielle complexe) Pour tout $z \in \mathbf{C}$, l'exponentielle de z est le nombre $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$. On définit ainsi une fonction $\mathbf{C} \to \mathbf{C}, z \mapsto e^z$, appelée *fonction exponentielle complexe.*

Définition 3.7.2 (Fonctions hyperboliques et trigonométriques complexes) Par analogie avec le cas réel, on peut de même définir les fonctions hyperboliques et trigonométriques complexes en posant :

$$\begin{aligned}\cosh z &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\\ \sinh z &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\\ \cos z &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\\ \cosh z &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.\end{aligned}$$

Ces définitions sont justifiées : d'une part, le rayon de convergence de ces séries est $+\infty$; d'autre part, pour $z \in \mathbf{R}$, nous retrouvons les développements établis en § 3.5.2 et § 3.5.3.

Ces fonctions sont liées à la fonction exponentielle. Tout d'abord, nous avons les formules évidentes suivantes pour les fonctions hyperboliques.

Proposition 3.7.3 *Pour tout $z \in \mathbf{C}$, on a*

$$\cosh z + \sinh z = e^z, \qquad \cosh z - \sinh z = e^{-z}$$
$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}. \blacksquare$$

Comme $i^{2n} = (-1)^n$ et $i^{2n+1} = i(-1)^n$, on a les relations suivantes entre les fonctions hyperboliques et trigonométriques

$$\cos z = \cosh(iz), \qquad \sin z = \frac{1}{i}\sinh(iz) \qquad \text{pour tout} \quad z \in \mathbf{C}.$$

On en déduit les formules suivantes pour les fonctions trigonométriques.

Proposition 3.7.4 *Pour tout $z \in \mathbf{C}$, on a*

$$\cos z + i \sin z = e^{iz}, \qquad \cos z - i \sin z = e^{-iz}$$
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

3.7.1 Formules d'addition

La fonction exponentielle complexe possède la même propriété fondamentale que l'exponentielle réelle.

Théorème 3.7.5 ***(Formule d'addition de l'exponentielle)*** *Pour tout* $z, w \in \mathbf{C}$, *on a*

$$e^{z+w} = e^z e^w.$$

Démonstration Les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{w^n}{n!}$, de sommes e^z et e^w, sont absolument convergentes. Leur produit de Cauchy, qui est la la série de terme général $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{z^k}{k!} \dfrac{w^{n-k}}{(n-k)!}$, est donc convergent et sa somme est $e^z e^w$. (voir Remarque 3.2.3). D'autre part, on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \\
&= \frac{1}{n!} (z+w)^n.
\end{aligned}$$

La somme de la série de terme général $\dfrac{1}{n!}(z+w)^n$ étant e^{z+w}, on a donc $e^z e^w = e^{z+w}$. ■

Corollaire 3.7.6 *(i) On a* $e^z \neq 0$ *et* $e^{-z} = 1/e^z$*pour tout* $z \in \mathbf{C}$.
(ii) On a $e^z/e^w = e^{z-w}$ *pour tous* $z, w \in \mathbf{C}$.
(iii) On a $(e^z)^n = e^{nz}$ *pour tout* $z \in \mathbf{C}$ *et* $n \in \mathbf{Z}$.
(iv) L'application $z \mapsto e^z$ *est un homomorphisme du groupe additif* $(\mathbf{C}, +)$ *dans le groupe multiplicatif* $(\mathbf{C}^*, \cdot)$.

Démonstration (i) On a $e^z e^{-z} = e^0 = 1$. Ceci implique que $e^z \neq 0$ et $e^{-z} = 1/e^z$.
(ii) On a, avec (ii) et la formule d'addition (Théorème 3.7.5)

$$\frac{e^z}{e^w} = e^z e^{-w} = e^{z-w}.$$

(iii) Pour $n \in \mathbf{N}$, la formule $(e^z)^n = e^{nz}$ découle de la formule d'addition (Théorème 3.7.5) par récurrence sur n. Pour $n < 0$, on a $-n > 0$ et il s'ensuit, avec (i), que

$$(e^z)^n = \frac{1}{(e^z)^{-n}} = \frac{1}{e^{-nz}} = e^{nz}.$$

(iv) L'assertion découle de la formule d'addition (Théorème 3.7.5) et de (i). ■

A partir de la formule d'addition de l'exponentielle, nous obtenons facilement les formules d'addition pour les fonctions hyperboliques et trigonométriques, déjà connues dans le cas réel.

Corollaire 3.7.7 ***(Formules d'addition des fonctions hyperboliques)*** *Pour tous $z, w \in \mathbf{C}$, on a*

$$\begin{aligned} \cosh(z+w) &= \cosh z \cosh w - \sinh z \sin w \\ \sinh(z+w) &= \sinh z \cos w + \cosh z \sin w \end{aligned}$$

Démonstration En utilisant la Proposition 3.7.4, on a

$$\begin{aligned} e^z e^w &= (\cosh z + \sinh z)(\cosh w + \sinh w) \\ &= \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w + \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w \\ e^{-z} e^{-w} &= (\cosh z - \sinh z)(\cosh w - \sinh w) \\ &= \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w - \sinh z \cosh w - \cosh z \sinh w. \end{aligned}$$

En additionnant et en retranchant ces deux égalités membre à membre, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{e^z e^w + e^{-z} e^{-w}}{2} &= \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w \\ \frac{e^z e^w - e^{-z} e^{-w}}{2} &= \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w. \end{aligned}$$

Comme $e^z e^w = e^{z+w}$ et $e^{-z} e^{-w} = e^{-(z+w)}$ l'assertion s'en déduit, en utilisant de nouveau Proposition 3.7.3.■

Corollaire 3.7.8 ***(Formules d'addition des fonctions trigonométriques)*** *Pour tous* $z, w \in \mathbf{C}$, *on a*

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$$
$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$$

Démonstration En utilisant la Proposition 3.7.4, on a

$$\begin{aligned} e^{iz}e^{iw} &= (\cos z + i\sin z)(\cos w + i\sin w) \\ &= \cos z \cos w - \sin z \sin w + i(\sin z \cos w + \cos z \sin w) \\ e^{-z}e^{-w} &= (\cos z - i\sin z)(\cos w - i\sin w) \\ &= \cos z \cos w - \sin z \sin w - i(\sin z \cos w - \cos z \sin w). \end{aligned}$$

En additionnant et en retranchant ces deux égalités membre à membre, on obtient

$$\frac{e^{iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw}}{2} = \cos z \cos w - \sin z \sin w$$
$$\frac{e^{iz}e^{iw} - e^{-iz}e^{-iw}}{2i} = \sin z \cos w + \cos z \sin w.$$

Comme $e^{iz}e^{iw} = e^{i(z+w)}$ et $e^{-iz}e^{-iw} = e^{-i(z+w)}$ l'assertion s'en déduit, en utilisant de nouveau Proposition 3.7.3.■

3.7.2 Partie réelle, partie imaginaire, module et argument de e^z

On rappelle que l'argument $\mathrm{Arg}\,(z)$ d'un nombre complexe z n'est défini qu'à un multiple entier de 2π près.

Proposition 3.7.9 *Soit* $z \in \mathbf{C}$, *de partie réelle* $x = \mathrm{Re}\,(z)$ *et de partie imaginaire* $y = \mathrm{Im}\,(z)$. *On a alors*

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,(e^z) &= e^x \cos y, \\ \mathrm{Im}\,(e^z) &= e^x \sin y, \\ |e^z| &= e^x, \\ \mathrm{Arg}\,(e^z) &= y. \end{aligned}$$

Démonstration On a

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos x + ie^x \sin y.$$

Toutes les assertions en découlent. ■

Corollaire 3.7.10 *(i) Pour tout* $t \in \mathbf{R}$, *on a* $\mathrm{Re}\,(e^{it}) = \cos t, \mathrm{Im}\,(e^{it}) = \sin t$ *et* $|e^{it}| = 1$.

(ii) Le nombre complexe z *de module* r *et d'argument* t *s'écrit* $z = re^{it}$.

(iii) Pour $z \in \mathbf{C}$, *on a* $e^z = 1$ *si et seulement si* $z \in 2\pi i\mathbf{Z}$.

(iv) Pour $z, w \in \mathbf{C}$, *on a* $e^z = e^w$ *si et seulement si* $z - z' \in 2\pi i\mathbf{Z}$. *En particulier, on a* $e^{z+2\pi i} = e^z$ *pour tout* $z \in \mathbf{C}$ *(c-à-d la fonction exponentielle complexe admet la période* $2\pi i$.

(v) ***(Formule d'Euler)*** $e^{i\pi} = -1$.

Démonstration Ce corollaire est une conséquence immédiate de la proposition précédente (Proposition 3.7.9). Par exemple, montrons (iii). Comme $\cos(2\pi k) = 1$ et $\sin(2\pi k) = 0$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$, il est clair, avec (i), que $e^z = 1$ si $z \in 2\pi i\mathbf{Z}$. Réciproquement, soit $z = x + iy \in \mathbf{C}$ tel que $e^z = 1$. Le module de e^z est donc 1 et son argument est 0 (modulo $2\pi\mathbf{Z}$). Par la Proposition 3.7.9, on a donc $e^x = 1$ et $y \in 2\pi\mathbf{Z}$. Ceci implique que $x = 0$ et donc $z \in 2\pi i\mathbf{Z}$. ■

3.8 Applications à la trigonométrie

3.8.1 Formule de Moivre

Soient $t_1, t_2, \ldots, t_n$ des nombres réels. On a

$$\begin{aligned}\cos(t_1 + \cdots + t_n) + i\sin(t_1 + \cdots + t_n) &== e^{i(t_1+\cdots+t_n)}\\ &= e^{it_1}e^{it_2}\cdots e^{it_n}\\ &= (\cos t_1 + i\sin t_1)\cdots(\cos t_n + i\sin t_n).\end{aligned}$$

En développant le produit du second membre de cette identité, la partie réelle donnera une expression de $\cos(t_1 + t_2 + \cdots + t_n)$ et la partie imaginaire donnera une expression de $\sin(t_1 + t_2 + \cdots + t_n)$ comme somme de produits de fonctions du type $\cos t_i$ et $\sin t_i$. Dans le cas $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = t$, on obtient un expression de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ comme fonction polynômiale en $\cos t$ et $\sin t$

Exemple 3.8.1 On a

$$\begin{aligned}\cos 5t + i\sin 5t &= (\cos t + i\sin t)^5\\ &= \cos^5 t + 5i\cos^4 t\sin t + 10i^2\cos^3 t\sin^2 t\\ &\qquad + i^3 10\cos^2 t\sin^3 t + i^4 5\cos t\sin^4 t + i^5\sin^5 t\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\cos 5t &= \cos^5 t - 10\cos^3 t\sin^2 t + 5\cos t\sin^4 t\\ \sin 5t &= 5\cos^4 t\sin t - 10\cos^2 t\sin^3 t + \sin^5 t.\end{aligned}$$

3.8.2 Linéarisation de $\cos^n t$ et $\sin^n t$

On s'intéresse au problème inverse : exprimer $\cos^n t$ ou $\sin^n t$ comme fonction linéaire de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$. De telles formules sont utiles, en particulier, pour calculer les primitives de $\cos^n t$ ou $\sin^n t$. Pour $t \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\begin{aligned}2^n\cos^n t &= (e^{it} + e^{-it})^n\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(n-k)t}e^{-ikt}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(n-2k)t},\end{aligned}$$

et comme nous savons que $2^n\cos^n t$ est un nombre réel, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}2^n\cos^n t &= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(n-2k)t}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\operatorname{Re}\left(e^{i(n-2k)t}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos((n-2k)t).\end{aligned}$$

Exemple 3.8.2 On a

$$\begin{aligned}16\cos^4 t &= (e^{it} + e^{-it})^4\\ &= 2\cos 4t + 8\cos 2t + 6\end{aligned}$$

et donc

$$\cos^4 t = \frac{1}{8}\cos 4t + \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{3}{8}\cos t.$$

3.9 Logarithme d'un nombre complexe

Par le Corollaire 3.7.6, l'application $z \mapsto e^z$ est un homomorphisme du groupe additif $(\mathbf{C}, +)$ dans le groupe multiplicatif $(\mathbf{C}^*, \cdot)$, de noyau $2\pi\mathbf{Z}$ (Corollaire 3.7.10). Nous allons voir qu'il est surjectif.

Théorème 3.9.1 *Soit* $w \in \mathbf{C}^*$ *; soit* $r > 0$ *son module et* θ *un de ses arguments. Les nombres complexes* z *qui vérifient l'équation* $e^z = w$ *sont les nombres de la forme* $\log r + i(\theta + 2\pi k)$ *pour* $k \in \mathbf{Z}$.

Démonstration Soient $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$. D'après la Proposition 3.7.9, l'équation $e^z = w$ équivaut aux équations

$$e^x = r \qquad \text{et} \qquad y \in \theta + 2\pi\mathbf{Z},$$

c-à-d aux conditions

$$x = \log r \qquad \text{et} \qquad y \in \theta + 2\pi\mathbf{Z}.\blacksquare$$

Définition 3.9.2 (Logarithme d'un nombre complexe) Soit $w \in \mathbf{C}^*$; soit $r > 0$ son module et θ un de ses arguments. Chaque nombre complexe de la forme $\log r + i(\theta + 2\pi k)$ pour $k \in \mathbf{Z}$ s'appelle un *logarithme* de w.

Remarque 3.9.3 Si w est un réel strictement positif, on a $w = r$ et on peut prendre $\theta = 0$. Le logarithme correspondant à la valeur $k = 0$ est le logarithme habituel du nombre réel z. Les autres logarithmes sont non réels.

Considérons les parties suivantes du plan complexe $\mathbf{C}$:

$$U = \{z \in \mathbf{C} | -\pi < \mathrm{Im}(z) < \pi\} \qquad V = \mathbf{C} \setminus I,$$

où $I = \mathbf{R}_- = \{x \in \mathbf{R} | x \leq 0\}$. On remarquera que U et V sont des parties ouvertes de $\mathbf{C}$. Pour $z \in U$, posons $f(z) = e^z$. Alors $f(z) \in V$ Soit $w \in V$; alors $w = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $-\pi < \theta < \pi$. On pose $g(w) = \log r + i\theta$. Alors $g(w) \in U$. On remarquer que g est *continue* sur V.

Définition 3.9.4 (Détermination principale du logarithme) L'application $g : V \to U$ est appelée *détermination principale du logarithme* et est notée $z \mapsto \log z$. On notera qu'elle prolonge l'application logarithme réelle habituelle.

Théorème 3.9.5 *Les applications $f : U \to V$ et $g : V \to U$ sont bijectives, continues et réciproques l'une de l'autre.*

Démonstration Ceci découle immédiatement du Théorème 3.9.1.■

3.10 Fonctions analytiques

On a vu (Théorème 3.4.3) que la somme d'une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ d'une variable réelle et de rayon de convergence R était indéfiniment dérivable sur son intervalle de convergence $]-R, R[$. Cependant, une fonction indéfiniment dérivable n'est pas nécessairement développable en série entière autour de 0 (voir Exemple 3.4.7). La classe des fonctions développables en série entière autour de 0 est donc plus restreinte que celles des fonctions indéfiniment dérivables dans un intervalle autour de 0. La propriété qui distingue ces deux classes est *l'analyticité*.

Une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ d'une variable réelle x et de rayon de convergence $R > 0$ "s'étend" en une série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de la variable réelle z et est convergente sur le disque $D_R = \{z \in \mathbf{C} | |z| < R\}$. Dans ce contexte, il est donc naturel d'étudier les fonctions d'une variable complexe.

Définition 3.10.1 Soit $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbf{C}$. On dit que f est *analytique* sur Ω si, pour tout $z_0 \in \Omega$, la fonction $u \mapsto f(u + z_0)$ est développable en série entière autour de 0, en d'autres termes : il existe $\varepsilon = \varepsilon(z_0) > 0$ et une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ avec un rayon de convergence $R \geq \varepsilon$ tels que $D_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbf{C} | |z - z_0| < \varepsilon\} \subset \Omega$ et

$$f(z) = f((z - z_0) + z_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{pour tout} \quad z \in D_\varepsilon(z_0).$$

La proposition suivante nous donnera une grande quantité d'exemples de fonctions analytiques.

Proposition 3.10.2 *Soit* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *une série entière de la variable complexe* z*, de rayon de convergence* $R > 0$ *et de somme* $s : D_R \to \mathbf{C}$*. Alors* s *est analytique sur* D_R*. De plus, pour tout* $z_0 \in D_R$ *et* z *tel que* $|z - z_0| < R - |z_0|$ *on a*

$$s(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} a_n n(n-1)\dots(n-k+1) z^{n-k} \right) (z - z_0)^k.$$

Démonstration Soit $z_0 \in D_R$ et z tel que $|z - z_0| < R - |z_0|$. Posons $u = z - z_0$. Alors

$$|z_0| + |u| < R - |z_0| + |z_0| = R.$$

Comme $|z_0 + u| \leq |z_0| + |u|$, il s'ensuit que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z_0 + u)^n$ converge absolument et on a

$$(*) \qquad s(z_0 + u) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z_0 + u)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_0^{n-k} u^k.$$

On remarque que, comme $|z_0| + |u| < R$,

$$\sum_{k=0}^{n} \left| a_n \binom{n}{k} u^k z_0^{n-k} \right| = |a_n| (|z_0| + |u|)^n$$

est le terme général d'une série convergente. Il s'ensuit qu'on peut intervertir l'ordre de sommation dans la somme $(*)$:

$$\begin{aligned} s(z_0 + u) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \binom{n}{k} z_0^{n-k} u^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=k}^{+\infty} a_n \binom{n}{k} z_0^{n-k} \right) u^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} a_n n(n-1)\dots(n-k+1) z_0^{n-k} \right) u^k. \end{aligned}$$

■

Exemple 3.10.3 Les exemples majeurs de fonctions analytiques sont :

- Les fonctions rationnelles $z \mapsto P(z)/Q(z)$ sur Ω, où Ω est le complémentaire dans $\mathbf{C}$ de l'ensemble des racines de Q (voir la Proposition 3.10.11 plus loin) ;
- La fonction exponentielle $z \mapsto e^z$ sur $\mathbf{C}$;
- les fonctions hyperboliques $z \mapsto \cosh z$ et $z \mapsto \sinh z$ sur $\mathbf{C}$;
- les fonctions trigonométriques $z \mapsto \cos z$ et $z \mapsto \sin z$ sur $\mathbf{C}$.

L'analyticité est liée à une autre propriété, appelée holomorphie.

Définition 3.10.4 Soit $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbf{C}$. On dit que f est *holomorphe* sur Ω ou encore $\mathbf{C}$-dérivable sur Ω, si, pour tout $z_0 \in \Omega$, la limite de nombres complexes

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe ; on note alors $f'(z_0)$ cette limite.

La proposition suivante montre que les séries entières sont holomorphes.

Proposition 3.10.5 *Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de la variable complexe z, de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $s : D_R \to \mathbf{C}$. Alors s est holomorphe sur D_R et on a $s'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$ pour tout $z \in D_R$.*

Démonstration Soit $z_0 \in D_R$. Soit $r > 0$ tel que $|z_0| < r < R$. Rappelons que la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$, qui est la série dérivée de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, a le même rayon de convergence R que cette dernière (Théorème 3.3.3). En particulier, elle converge absolument pour $z = z_0$ et pour $z = r$. Pour tout $z \in D_r$ avec $z \neq z_0$, on a

$$s(z) - s(z_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z^n - z_0^n)$$

et donc

$$\begin{aligned}
\frac{s(z) - s(z_0)}{z - z_0} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z_0^{n-1} &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - n z_0^{n-1} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \cdots + z_0^{n-2} z + z_0^{n-1} - n z_0^{n-1} \right).
\end{aligned}$$

Comme $|z_0| < r$ et $|z| < r$, on a

$$\begin{aligned}&\left|z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \cdots + z_0^{n-2} z + z_0^{n-1} - n z_0^{n-1}\right| \leq \\ &\leq |z|^{n-1} + |z_0||z|^{n-2} + \cdots + |z_0|^{n-2}|z| + |z_0|^{n-1} + n|z_0|^{n-1} \leq \\ &\leq 2nr^{n-1}.\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. La série de terme général $na_n r^{n-1}$ étant absolument convergente, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} 2n|a_n|r^{n-1} \leq \varepsilon/2.$$

Soit $f_N : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ le polynôme défini par

$$f_N(z) = \sum_{n=1}^{N} a_n \left(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \cdots + z_0^{n-2} z + z_0^{n-1} - n z_0^{n-1}\right).$$

On a $\lim_{z\to z_0} f_N(z) = 0$. Il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$|f_N(z)| \leq \varepsilon/2 \qquad \text{pour tout} \quad z \in \mathbf{C}, \quad |z - z_0| < \delta.$$

Soit $\delta' = \min\{\delta, r - |z_0|\}$. Pour tout $z \in \mathbf{C}, z \neq z_0$ avec $|z - z_0| < \delta'$, on a alors $|z - z_0| < \delta$ ainsi que

$$|z| \leq |z - z_0| + |z_0| < r - |z_0| + |z_0| = r;$$

avec ce qui précède, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}&\left|\frac{s(z) - s(z_0)}{z - z_0} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z_0^{n-1}\right| = \\ &= \left|f_N(z) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n \left(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \cdots + z_0^{n-2} z + z_0^{n-1} - n z_0^{n-1}\right)\right| \\ &\leq |f_N(z)| + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| \left|z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \cdots + z_0^{n-2} z + z_0^{n-1} - n z_0^{n-1}\right| \\ &\leq |f_N(z)| + \sum_{n=N+1}^{+\infty} 2|a_n| n r^{n_1} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Ceci montre que

$$\lim_{z\to z_0} \frac{s(z)-s(z_0)}{z-z_0} = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z_0^{n-1}. \blacksquare$$

Corollaire 3.10.6 *Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de la variable complexe z, de rayon de convergence $R>0$ et de somme $s : D_R \to \mathbf{C}$. Alors sa dérivée $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$ de somme s', ainsi que ses dérivées successives*

$$\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n z^{n-k}$$

de somme $s^{(k)}$, sont analytiques. De plus, pour tout $z_0 \in D_R$ et z tel que $|z-z_0| < R - |z_0|$ on a

$$s(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

Démonstration La première assertion découle de la proposition précédente (Proposition 3.10.5), appliquée à la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$ de somme s', ainsi qu'à ses dérivées successives. La deuxième assertion est une conséquence de la Proposition 3.10.2, en remarquant que

$$\frac{1}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty} a_n n(n-1)\ldots(n-k+1) z_0^{n-k} = \frac{s^{(k)}(z_0)}{k!}. \blacksquare$$

Corollaire 3.10.7 ***(L'analyticité implique l'holomorphie)*** *Soit $f : \Omega \to \mathbf{C}$ une fonction analytique sur une partie ouverte Ω de $\mathbf{C}$. Alors f est holomorphe sur Ω.*

Démonstration Soit $z_0 \in \Omega$. Par définition, il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ avec un rayon de convergence $R>0$ et de somme s ainsi qu'un ε avec $0 < \varepsilon \leq R$ tels que $f(z_0+u) = s(u)$ pour tout $|u| < \varepsilon$. Comme

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{u\to 0} \frac{s(u)-s(0)}{u},$$

l'assertion découle de la Proposition 3.10.5. $\blacksquare$

Remarque 3.10.8 (L'holomorphie implique l'analyticité) On peut montrer, et nous ne le ferons pas ici (voir le cours "Fonctions holomorphes"), que la réciproque est vraie : toute fonction holomorphe $f : \Omega \to \mathbf{C}$ est analytique sur Ω.

Soit s la somme d'une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, de rayon de convergence $R > 0$. Supposons que $s^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Alors $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ (par la formule du Corollaire 3.3.6 liant a_n et $s^{(n)}(0)$) et donc $s = 0$ sur D_R. Nous allons voir que ceci est encore vrai si on remplace 0 par $z_0 \in D_R$ quelconque.

Corollaire 3.10.9 ***(Zéros d'une série entière)*** *Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de la variable complexe z, de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $s : D_R \to \mathbf{C}$. Soit $z_0 \in D_R$. Supposons que $s^{(n)}(z_0) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Alors $s = 0$ sur D_R.*

Démonstration Comme $a_n = s^{(n)}(0)/n!$, il suffit de montrer que $s^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Si $z_0 = 0$, il n'y a rien à démontrer. On peut donc supposer que $z_0 \neq 0$.

Il découle du Corollaire 3.10.6 que

$$s(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = 0$$

et donc $s^{(n)}(z) = 0$ pour tout z tel que $|z - z_0| < R - |z_0|$ et tout $n \in \mathbf{N}$. Soit

$$A = \{t \in [0, 1] \mid s^{(n)}(tz_0) = 0 \qquad \text{pour tout} \quad n \in \mathbf{N}\}.$$

Comme $1 \in A$, l'ensemble A n'est pas vide. Soit $t_0 = \inf A$. Alors $t_0 = \min A$. En effet, soit $(t_k)_k \in A$ telle que $\lim_k t_k = t$. Pour tout n, on a alors

$$s^{(n)}(t_0 z_0) = \lim_k s^{(n)}(t_k z_0) = 0$$

et donc $t_0 \in A$. Il suffit donc de montrer que $t_0 = 0$.

Soit $t \in A$ avec $t > 0$. Alors, comme plus haut, $s^{(n)}(z) = 0$ pour tout z tel que $|z - tz_0| < R - |tz_0|$ et tout $n \in \mathbf{N}$. Ceci implique qu'il existe $\delta > 0$ tel que $s \in A$ pour tout $s \in]t - \delta, t]$ (il suffit de prendre $\delta < (R - |tz_0|)/|z_0|$). Donc $t \neq \min A = t_0$. Il s'ensuit que $t_0 = 0$. ■

Le corollaire suivant montre que les zéros d'une série entière non nulle ne peuvent pas s'accumuler dans son disque de convergence.

Corollaire 3.10.10 ***(Zéros d'une série entière-bis)*** *Soit* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *une série entière de la variable complexe* z*, de rayon de convergence* $R > 0$ *et de somme* $s : D_R \to \mathbf{C}$*. Soit* $z_0 \in D_R$*. On suppose qu'il existe une suite* $(w_n)_n$ *dans* D_R *avec* $w_n \neq z_0$ *telle que* $\lim_n w_n = z_0$ *et* $s(w_n) = 0$ *pour tout* $n \in \mathbf{N}$*. Alors* $s = 0$ *dans* D_R*.*

Démonstration Comme $\lim_n w_n = z_0$ et $s(w_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et comme s est continue en z_0 (Théorème 3.1.13), on a $s(z_0) = 0$. Par le Corollaire 3.10.6, on a

$$s(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

si $|z - z_0| < R - |z_0|$.

Montrons que $s^{(n)}(z_0) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$; le corollaire précédent (Corollaire 3.10.9) permettra alors de conclure.

Supposons, par l'absurde, qu'il existe un $k \in \mathbf{N}$ tel que $s^{(k)}(z_0) \neq 0$. Soit $k \in \mathbf{N}$ minimal avec cette propriété. Comme $s(z_0) = 0$, on a $k \geq 1$. Alors, on peut écrire, pour tout z tel que $|z - z_0| < R - |z_0|$

$$s(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{s^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = (z - z_0)^k g(z),$$

où

$$g(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{s^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-k}.$$

Comme $\lim_n w_n = z_0$, il existe N tel que $|w_n - z_0| < R - |z_0|$ et donc

$$s(w_n) = (w_n - z_0)^k g(w_n), \qquad \text{pour tout} \quad n \geq N.$$

Comme, par hypothèse, $s(w_n) = 0$ et $w_n \neq z_0$, on a alors $g(w_n) = 0$ pour tout $n \geq N$. D'autre part, on a

$$\lim_n g(w_n) = g(z_0) = \frac{s^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0.$$

Ceci est une contradiction. ■

Montrons maintenant que les fonctions rationnelles sont analytiques.

Proposition 3.10.11 ***(Analyticité des fonctions rationnelles)*** *Soient P et Q deux fonctions polynômiales sur $\mathbf{C}$. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbf{C}$ les racines de Q. La fonction rationnelle $R : z \mapsto P(z)/Q(z)$ est analytique sur $\mathbf{C} \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$.*

Démonstration On décompose R en éléments simples :

$$R(z) = E(z) + \sum_{j=1}^{s} \sum_{l=1} N_j \frac{A_{il}}{(z-\alpha_j)^l},$$

où E est un polynôme et $A_{il} \in \mathbf{C}$. Une somme de fonctions analytiques sur un domaine Ω étant analytique sur Ω, il suffit donc de montrer qu'une fonction du type $z \mapsto \dfrac{1}{(z-\alpha)^l}$ est analytique sur $\mathbf{C} \setminus \{\alpha\}$.

Soit $z_0 \in \mathbf{C} \setminus \{\alpha\}$. Pour tout z tel que $|z - z_0| < |\alpha - z_0|$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-\alpha} &= -\frac{1}{\alpha - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\alpha - z_0}} \\
&= -\frac{1}{\alpha - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-z_0}{\alpha - z_0} \right)^n \\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha - z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n.
\end{aligned}$$

Avec $s(z) = \frac{1}{z-\alpha}$, on a

$$s^{(l-1)}(z) = (-1)^{l-1}(l-1)! \frac{1}{(z-\alpha)^l}.$$

Il s'ensuit (voir Corollaire 3.10.6) que

$$\frac{1}{(z-\alpha)^l} = \frac{(-1)^l}{(l-1)!} \sum_{n=l-1}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha - z_0)^{n+1}} n(n-1)\cdots(n-l)(z-z_0)^{n-l+1}$$

pour tout z tel que $|z - z_0| < |\alpha - z_0|$. ■

3.11 Le théorème d'Abel

Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière, de rayon de convergence $R > 0$. Il n' y pas de résultat général sur la nature de la série au bord de l'intervalle de convergence, c-à-d quand $x = \pm R$. Cependant, comme nous le verrons plus loin (Théorème 3.11.5), quand la série converge en un tel point, on a un résultat de continuité de la somme.

Montrons tout d'abord le résultat suivant sur les séries numériques qui généralise le critère de Leibniz (Remarque 3.5.1). On aura besoin de la formule de "sommation par parties" suivantes.

Lemme 3.11.1 ***(Formule de sommation d'Abel)*** *Soient* $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *deux suites de nombres complexes. Soit* $S_n = \sum_{k=0}^n w_k$. *Alors on a*

$$\sum_{k=n}^{m} v_k w_k = v_m S_m - v_n S_{n-1} - \sum_{k=n}^{m-1}(v_{k+1} - v_k) S_k \qquad \textit{pour tous} \quad m > n > 1.$$

Démonstration On observe que $S_k - S_{k-1} = w_k$ pour tout $k \geq 1$. On a donc, pour tout $m > n > 1$:

$$\sum_{k=n}^{m} v_k w_k = \sum_{k=n}^{m} v_k (S_k - S_{k-1}) =$$
$$= v_n(S_n - S_{n-1}) + v_{n+1}(S_{n+1} - S_n) + \cdots + v_{m-1}(S_{m-1} - S_{m-2}) + v_m(S_m - S_{m-1})$$
$$= -v_n S_{n-1} - \sum_{k=n}^{m-1}(v_{k+1} - v_k) S_k + v_m S_m. \blacksquare$$

Théorème 3.11.2 ***(Critère d'Abel)*** *Soient* N *un entier et* $(v_n)_{n\geq N}$ *une suite décroissante de nombres réels positifs telle que* $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$. *Soit* $(w_n)_{n\geq N}$ *une suite de nombres complexes telle que la suite des sommes partielles* $(S_n)_{n\geq N} = (\sum_{k=N}^n w_k)_{n\geq N}$ *soit bornée par une constante* $C > 0$:

$$\left|\sum_{k=N}^{n} w_k\right| \leq C \qquad \textit{pour tous} \quad n \geq N.$$

Alors la série $\sum_n v_n w_n$ *est convergente. De plus, on a*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} v_k w_k\right| \leq 2C v_{n+1} \qquad \textit{pour tous} \quad m > n \geq N.$$

et par conséquent la majoration suivante du reste de la série :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k w_k\right| \leq 2Cv_{n+1} \qquad \textit{pour tous} \quad m > n \geq N.$$

Démonstration Soient $m > n > N$. Comme la suite $(S_n)_{n\geq N}$ est bornée par C et que $(v_n)_{n\geq N}$ est décroissante, on a, en utilisant la formule de sommation d'Abel (Lemme 3.11.1) :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n}^{m} v_k w_k\right| &= \left|v_m S_m - v_n S_{n-1} - \sum_{k=n}^{m-1}(v_{k+1} - v_k)S_k\right| \\
&\leq C(v_n + v_m + \sum_{k=n}^{m-1} |v_{k+1} - v_k|) \\
&= C\left(v_n + v_m + \sum_{k=n}^{m-1}(v_k - v_{k+1})\right) \\
&= 2Cv_n.
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, il existe $N_0 > N$ tel que

$$v_n < \varepsilon/2C \qquad \text{pour tout} \quad n \geq N_0.$$

Il s'ensuit que

$$\left|\sum_{k=n}^{m} v_k w_k\right| \leq \varepsilon \qquad \text{pour tout} \quad m > n > N_0.$$

Cette inégalité montre que la somme partielle de la série de terme général $v_n w_n$ satisfait au critère de Cauchy et est donc convergente. De plus, en faisant $m \to \infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k w_k\right| \leq 2Cv_{n+1}.\blacksquare$$

Remarque 3.11.3 Le critère d'Abel généralise bien le critère de Leibniz : on pose $w_n = (-1)^n$. Alors

$$|w_m + w_{m+1} + \cdots + w_n| \leq 1;$$

par conséquent, la série de terme général $(-1)^n v_n$ est convergente, avec la majoration du reste de la série $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k v_k\right| \leq 2v_{n+1}$.

Exemple 3.11.4 Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$. Le critère d'Abel montre que la série de terme général $u_n(x) = \dfrac{e^{2\pi inx}}{n+1}$ converge. En effet, posons $v_n = 1/(n+1)$ et $w_n = e^{2\pi inx}$. Alors, comme $x \notin \mathbf{Z}$, on a $e^{2\pi ix} \neq 1$ et donc

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{2\pi inx} = \sum_{k=0}^{n} (e^{2\pi ix})^n = \frac{1-(e^{2\pi ix})^{n+1}}{1-e^{2\pi ix}}$$

et donc

$$|S_n| = \left|\frac{1-(e^{2\pi ix})^{n+1}}{1-e^{2\pi ix}}\right| \leq \frac{2}{|1-e^{2\pi ix}|}$$

pour tout n et la constante $C = \dfrac{2}{|1-e^{2\pi ix}|}$ convient.

Théorème 3.11.5 ***(Théorème d'Abel)*** *Soit $\sum_n a_n x^n$ une série de la variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $s :]-R, R[\to \mathbf{C}$. Soit $x_0 = R$ ou $x_0 = -R$. On suppose que la série $\sum_n a_n x_0^n$ converge. Alors la limite $\lim_{x \to x_0, |x|<R} s(x)$ existe et on a*

$$\lim_{x \to x_0, |x|<R} s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n.$$

Démonstration Quitte à remplacer a_n par $(-1)^n a_n$, nous pouvons supposer que $x_0 = R$, c-à-d que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$ converge. Etendons la fonction s à $]-R, R]$ en posant $s(R) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$. Par hypothèse, la série entière $\sum_n a_n x^n$ converge simplement sur $]-R, R]$ vers s. Nous allons montrer que cette convergence est uniforme sur $[0, R]$. Par le théorème de continuité des limites uniformes (Théorème 2.5.1), ceci impliquera que s est continue sur $[0, R]$ et ceci signifie que $\lim_{x \to x_0, |x|<R} s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $x \in [0, R[$, posons $v_n(x) = \left(\dfrac{x}{R}\right)^n$ et $w_n = a_n R^n$. La suite $(v_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est positive et décroissante et $\lim_{n\to+\infty} v_n(x) = 0$. De plus, comme la série $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n$ converge, il existe (par le critère de Cauchy) un $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$|\sum_{k=n}^{m} w_k| \leq \varepsilon \qquad \text{pour tous} \quad m > n \geq N.$$

Pour $x \in [0, R[$, on a $s(x) = \sum_n v_n(x) w_n$; une application du critère d'Abel (Théorème 3.11.2) montre que, pour tout $m > n \geq N$ et tout $x \in [0, 1[$, on a

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k x^k \right| = \left| \sum_{k=n+1} v_k(x) w^k \right| \leq 2\varepsilon v_{n+1} \leq 2\varepsilon \left(\frac{x}{R} \right)^{n+1} < 2\varepsilon.$$

En faisant $x \to 1^-$, on obtient cette inégalité également $x = 1$. Par le critère de Cauchy de convergence uniforme des séries (Théorème 2.2.7), il s'ensuit que la série de terme général $a_n x^n$ converge uniformément sur $[0, R]$. ■

Exemple 3.11.6 (i) La fonction $x \mapsto \log(1 + x)$ possède le développement en série entière $\log(1 + x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$, valable pour $|x| < 1$ (voir § 3.5.4). Comme la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ converge pour $x = 1$, le théorème d'Abel (Théorème 3.11.6) implique que ce développement reste valable pour $x = 1$ et on obtient

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots .$$

(ii) La fonction $x \mapsto \mathrm{Arctg} x$ possède le développement en série entière $\mathrm{Arctg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, valable pour $|x| < 1$ (voir § 3.5.5) ; comme la série converge également en $x = 1$, ce développement est encore valable en $x = 1$ et on obtient

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots .$$

3.12 Exercices

Exercice 3.12.1 (Domaine de convergence de séries entières) Déterminer le domaine de convergence des séries entières suivantes de terme général u_n :

(i) $u_n(x) = n^n x^n$	(ii) $u_n(x) = \frac{x^n}{n^n}$
(iii) $u_n(x) = n^3 x^n$	(iv) $\frac{(-1)^n}{3n+1} x^n$
(v) $u_n(x) = \frac{n^n}{n!} x^n$	(vi) $u_n(x) = e^{(-1)^n n} x^n$

Exercice 3.12.2 (Rayon de convergence de séries entières) Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes de la variable complexe z et de terme général u_n :

$$\begin{array}{llll} \text{(i)} & u_n(z) = \dfrac{n!}{(2n)!} z^n & \text{(ii)} & u_n(x) = (\log n) z^n \\ \text{(iii)} & u_n(x) = \dfrac{n}{3^n+1} z^{2n} & \text{(iv)} & \dfrac{(2+i)^n}{n2^n} z^n \\ \text{(v)} & u_n(x) = n^{\log n} z^n & \text{(vi)} & u_n(x) = (1+2ni)^n z^n \end{array}$$

Exercice 3.12.3 (Rayon de convergence de séries entières) Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes de la variable complexe z et de terme général u_n :

$$\begin{array}{llll} \text{(i)} & u_n(z) = \log\left(1+\sin(1/n)\right) z^n & \text{(ii)} & u_n(x) = \sin(\pi n/3) z^n \\ \text{(iii)} & u_n(x) = (e^{1/n}-1) z^{2n} & \text{(iv)} & \left(\cos(1/n) - 1 + 1/n^2\right) z^n \end{array}$$

Exercice 3.12.4 (Rayon de convergence de la somme de séries entières) Soient $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières, de rayons de convergence respectifs R_1 et R_2 avec $R_1 \neq R_2$. Montrer que le rayon de convergence de la série $\sum_n (a_n + b_n) z^n$ est $R = \min\{R_1, R_2\}$.

Exercice 3.12.5 (Produit de Cauchy de deux séries entières) Soient $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ les deux séries entières définies par les suites $a_0 = 2, b_0 = -1$ et $a_n = 2^n, b_n = 1$ pour $n \geq 1$.
(i) Calculer les rayons de convergence des séries entières $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$.
(ii) Déterminer le produit de Cauchy $\sum_n c_n z^n$ des séries entières $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$.
(iii) Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_n c_n z^n$.
(iv) Que peut-on conclure ?

Exercice 3.12.6 (Etude d'une série entière) On considère la série entière $\sum_{n\geq 1} \tan(\frac{1}{n}) x^n$ de la variable réelle x.
(i) Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
(ii) Montrer, à l'aide du critère de Leibniz des séries alternées, que la série entière est convergente pour $x = -R$.
(iii) Montrer que la série entière est divergente pour $x = R$.

Soit S la somme de la série entière $\sum_{n\geq 1} \tan(\frac{1}{n}) x^n$.

(iv) Determiner les séries entières $\sum_n b_n x^n$ et $\sum_n c_n x^n$ qui représentent autour de 0 la dérivée S' et la primitive F de S avec $F(0) = 0$.
(v) Determiner l'ensemble de *tous* les $x \in \mathbf{R}$ pour lesquels la série $\sum_n b_n x^n$ converge.
(vi) Determiner l'ensemble de *tous* les $x \in \mathbf{R}$ pour lesquels la série $\sum_n c_n x^n$ converge.
(vii) Montrer qu'il existe N tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \tan(\frac{1}{k}) > M \qquad \text{pour tout} \quad n \geq N.$$

(viii) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]1-\delta, 1+\delta]$, on a

$$\sum_{k=1}^{N} \tan(\frac{1}{k}) x^k \geq M.$$

Indication : considérer la fonction $g(x) = \sum_{k=1}^{N} \tan(1/k) x^k$
(ix) Etudier la limite de $S(x)$ quand $x \to R-$.

Exercice 3.12.7 (Développement en série entière d'une fonction)
On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \log(x^2 - 3x + 2).$$

Quel est le domaine de définition E de f?
(i) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in E$.
(ii) Déterminer le développement de f' en série entière autour de 0, en précisant le rayon de convergence de sa série de Taylor.
(iii) Déterminer le développement de f en série entière autour de 0, en précisant le rayon de convergence de sa série de Taylor.

Exercice 3.12.8 (Développement en série entière d'une fonction)
On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right).$$

(i) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

(ii) Déterminer le développement de f' en série entière autour de 0, en précisant le rayon de convergence de sa série de Taylor.
(iii) Déterminer le développement de f en série entière autour de 0, en précisant le rayon de convergence de sa série de Taylor.

Exercice 3.12.9 (Développement en série entière d'une fonction) On considère la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par

$$f(x) = (x+1)\log(1+x).$$

Déterminer le développement de f en série entière autour de 0, en précisant le rayon de convergence de sa série de Taylor.

Exercice 3.12.10 (Développement en série entière d'une fonction) On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \cos(x+1).$$

Déterminer le développement de f en série entière autour de 0, en précisant le rayon de convergence de sa série de Taylor.

Indication : on pourra exprimer $f(x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$..

Exercice 3.12.11 (Développement en série entière d'une fonction) On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

Déterminer le développement de f en série entière autour de 0, en précisant le rayon de convergence de sa série de Taylor.

Exercice 3.12.12 (Développement en série entière d'une fonction) On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \log(x^2 - 3x + 2).$$

(i) Quel est le domaine de définition E de f?

(ii) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in E$.
(iii) Déterminer le développement de f' en série entière autour de 0, en précisant le rayon de convergence de sa série de Taylor.
(iv) Déterminer le développement de f en série entière autour de 0, en précisant le rayon de convergence de sa série de Taylor.

Exercice 3.12.13 (Développement en série entière d'une fonction)
On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right).$$

(i) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
(ii) Déterminer le développement de f' en série entière autour de 0, en précisant le rayon de convergence de sa série de Taylor.
(iii) Déterminer le développement de f en série entière autour de 0, en précisant le rayon de convergence de sa série de Taylor.

Exercice 3.12.14 (Développement en série entière d'une fonction)
On considère la fonction f définie sur $]-1, +\infty[$ par

$$f(x) = (x+1)\log(1+x).$$

Déterminer le développement de f en série entière autour de 0, en précisant le rayon de convergence de sa série de Taylor.

Exercice 3.12.15 (Développement en série entière d'une fonction)
On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \cos(x+1).$$

Déterminer le développement de f en série entière autour de 0, en précisant le rayon de convergence de sa série de Taylor.

Indication : on pourra exprimer $f(x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$..

Exercice 3.12.16 (Développement en série entière d'une fonction)
On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

(i) Déterminer le développement de f en série entière autour de 0, en précisant le rayon de convergence de sa série de Taylor.
(ii) Soit g la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = e^x\ f(x)$. Déterminer le développement de g en série entière autour de 0, en précisant le rayon de convergence de sa série de Taylor.

Exercice 3.12.17 (*) Soient $a > 0$ et $f :]-a, a[\to \mathbf{R}$ une fonction indéfiniment dérivable. On dit que f est *absolument monotone* si $f^{(n)}(x) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $x \in]-a, a[$ (avec la convention habituelle, $f^{(0)} = f$).
(i) Donner des exemples de fonctions absolument monotones.

Soit $f :]-a, a[\to \mathbf{R}$ une fonction absolument monotone.
(ii) Soit $0 \leq r < a$. Montrer que la série de Taylor $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}}{n!}(0) r^n$ converge et est majorée par $f(r)$.
(iii) Déduire de (ii) que f est développable en une série entière, avec un rayon de convergence $R \geq a$. *Indication :* Soit $x \in]-a, a[$; prenrde $0 \leq r < a$ tel que $|x| \leq r$ et majorer le reste dans la formule de Taylor-Maclaurin.

Exercice 3.12.18 (Solution d'une équation différentielle)
(i) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $u_{2n} = 3^{2n}$ et $u_{2n+1} = \sin(2n+1)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Calculer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.
Pour tout $x \in]-R, R]$, on note $f(x)$ la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ du point (i).
(ii) Soit y la somme d'une autre série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $r > 0$. Soit $R' = \min\{r, R\}$. On suppose que y est solution sur $]-R', R'[$ de l'équation différentielle (E) : $x^2 y''(x) + 5xy'(x) + 4y(x) = f(x)$.

Déterminer a_n pour tout $n \in \mathbf{N}$ ainsi que le rayon de convergence r de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
(iii) Montrer que la somme y de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, avec les a_n obtenus en (ii), est bien deux fois dérivable sur $]-r, r[$ et satisfait à l'équation différentielle (E) sur $]-r, r[$.

Exercice 3.12.19 (Solution d'une équation différentielle) On considère l'équation différentielle $y'(x) - 2xy(x) = 0$. Trouver toutes les solutions de cette équation qui sont somme d'une série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

Exercice 3.12.20 (Solution d'une équation différentielle) On considère l'équation différentielle (E) : $y''(x) + 2xy'(x) + 2y(x) = 0$.

(i)Trouver toutes les solutions $y = y(x)$ de l'équation (E) qui sont somme d'une série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.
(ii) Montrer qu'il existe une unique solution $y = y(x)$ de l'équation (E) qui soit développable en série entière avec $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$. Déterminer son rayon de convergence et sa somme.

Exercice 3.12.21 (Polynômes en $\cos t$ et $\sin t$) Ecrire les expressions $f(x)$ suivantes comme polynômes en $\cos t$ et $\sin t$:
(i) $f(x) = \cos 3t$; (ii) $f(x) = \sin 3t$;
(iii) $f(x) = \cos 5t$; (iv) $f(x) = \sin 5t$.

Exercice 3.12.22 (Linéarisation de puissances de fonctions trigonométriques) Ecrire les expressions $f(x)$ suivantes comme combinaisons linéaires de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$:
(i) $f(x) = \cos^3 x$; (ii) $f(x) = \sin^3 x$;
(iii) $f(x) = \cos^2 x \sin^4 x$; (iv) $f(x) = \cos^4 x \sin^2 x$.

Exercice 3.12.23 (Une application du critère d'Abel) Soit $\alpha \in [0, 1]$ fixé.
(i) Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_n \dfrac{1}{n^\alpha} z^n$ est égal à 1.
(ii) Pour chaque $z \in \mathbf{C}$ avec $|z| = 1$, étudier la nature de la série $\sum_n \dfrac{1}{n^\alpha} z^n$.

A partir de maintenant, $\alpha = 1$. Soit $f :]0, 1[\mapsto \mathbf{C}$ la somme de la série entière $\sum_n \dfrac{i^n}{n} x^n$ de la variable réelle x.
(iv) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0, 1[$.
(iv) Calculer $f(x)$ en termes des fonctions usuelles pour $x \in]0, 1[$.
(v) Que peut-on en déduire pour $\lim_{x \to 1-} f(x)$?
(vi) En déduire les valeurs des séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$

Exercice 3.12.24 (Une application du théorème d'Abel) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit $a_n = \dfrac{n+5}{(n+1)(n+2)}$.
(i) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est 1.

(ii) Montrer que la somme $s(x)$ de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ pour $x \in]0,1[$ est égale à $\dfrac{4\log(1+x)}{x} - \dfrac{3}{x^2}(\log(1+x) - x)$.
(iii) Montrer que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge pour $x = -1$ et calculer la valeur de sa somme.

Exercice 3.12.25 (Deux sommes trigonométriques) Soit $z \in \mathbf{C} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kz) = \frac{\cos nz/2 \sin(n+1)z/2}{\sin z/2}$$
$$\sum_{k=0}^{n} \sin(kz) = \frac{\sin nz/2 \sin(n+1)z/2}{\sin z/2}$$

Exercice 3.12.26 (Intégrales de fonctions trigonométriques) Pour $n, m \in \mathbf{N}$, calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx$;
2. $\int_0^{2\pi} \cos(nx)\sin(mx)dx$;
3. $\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx$.

Exercice 3.12.27 (*) (i) Soit $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$ fixé. Déterminer le rayon de convergence R des séries $\sum_n \dfrac{\cos(n\alpha)}{n} z^n$ et $\sum_n \dfrac{\sin(n\alpha)}{n} z^n$.
(ii) Pour $\alpha \in \mathbf{R}\setminus\pi\mathbf{Z}$ et $x \in]-R, R[$, calculer les sommes des séries $\sum_n \dfrac{\cos(n\alpha)}{n} x^n$ et $\sum_n \dfrac{\sin(n\alpha)}{n} x^n$. Indication : soit $S(x)$ la somme de la série entière $\sum_n \frac{e^{i\alpha n}}{n} x^n$; calculer $S'(x)$.

Exercice 3.12.28 (*) Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on note p_n le nombre de triplets $(k, l, m) \in \mathbf{N}^2$ qui sont solutions de l'équation $k + 2l + 3m = n$.
(i) Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = \dfrac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)}$, pour tout $z \in \mathbf{C}$ avec $|z| < 1$.

(ii) En déduire p_n et vérifier que $p_n \sim \dfrac{n^2}{12}$ quand $n \to +\infty$. *Indication :* décomposer $\frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)}$ en éléments simples.

(iii) **(**)** Soient $a_1, \ldots, a_m$ des nombres entiers ≥ 1 et premiers entre eux. Généraliser ce qui précède en montrant que le nombre p_n de m-tuplets $(k_1, \ldots, k_m) \in \mathbf{N}^m$ qui sont solutions de l'équation $a_1 k + \cdots + a_m k_m = n$ est équivalent à $\dfrac{n^{m-1}}{(m-1)! a_1 \cdots a_m}$. *Indication :* décomposer $F(z) = \prod_{i=1}^m \frac{1}{(1-z^{a_i})}$ en éléments simples et observer que 1 est l'unique pôle d'ordre maximal m de F.

Chapitre 4

Séries trigonométriques

4.1 Définitions

Définition 4.1.1 (Série trigonométrique) On appelle *série trigonométrique* une série de fonctions de la variable réelle x dont le terme général $u_n : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est de la forme

$$(*) \qquad u_0(x) = a_0,\ u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \qquad \text{pour tout} \quad n \geq 1,$$

où $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont deux suites de nombres complexes.

Il est plus commode de passer à la représentation exponentielle de ces séries.

Proposition 4.1.2 *Une série de fonctions de la variable réelle x est une série trigonométrique si et seulement si son terme général $u_n : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est de la forme*

$$(**) \qquad u_0(x) = c_0,\ u_n(x) = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} \qquad \textit{pour tout} \quad n \geq 1,$$

où $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(c_{-n})_{n\in\mathbf{N}}$ sont deux suites de nombres complexes.

Démonstration On a, avec les formules de la Proposition 3.7.4,

$$\begin{aligned} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) &= a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \\ &= \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} &= c_n(\cos(nx) + i\sin(nx)) + c_{-n}(\cos(nx) - i\sin(nx)) \\ &= (c_n + c_{-n})\cos(nx) + i(c_n - c_{-n})\sin(nx). \end{aligned}$$

L'assertion en découle. ■

Remarque 4.1.3 On préférera en général raisonner avec des séries trigonométriques sous la forme $(**)$. La preuve précédente montre comment sont reliées les formes $(*)$ et $(**)$:

$$c_0 = a_0, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2},\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \qquad \text{pour tout} \quad n \geq 1$$

et

$$a_0 = c_0, \quad a_n = c_n + c_{-n},\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \qquad \text{pour tout} \quad n \geq 1.$$

On notera généralement une série trigonométrique par $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{inx}$.

4.2 Convergence d'une série trigonométrique

L'étude de la convergence des séries trigonométriques n'est pas aisée en général. Nous nous contenterons des deux résultats suivants de convergence.

Théorème 4.2.1 *Soit $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(c_{-n})_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites nombres complexes. Supposons que les séries de terme général $|c_n|$ et $|c_{-n}|$ convergent. Alors la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{inx}$ est normalement et donc uniformément convergente sur $\mathbf{R}$.*

Démonstration Pour tout $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$, on a

$$|c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}| \leq |c_n| + |c_{-n}|.$$

Comme, par hypothèse, la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} |c_n| + |c_{-n}|$ converge, il s'ensuit que la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{inx}$ est normalement convergente.■

Théorème 4.2.2 *Soient suites $(c_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(c_{-n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ deux suites positives, décroissantes et tendant vers 0 quand $n \to +\infty$. Alors, pour tout $x \notin 2\pi\mathbf{Z}$, la série $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{inx}$ est convergente. De plus, $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{inx}$ est uniformément convergente sur tout intervalle de la forme $[2k\pi+\alpha, 2(k+1)\pi-\alpha]$ avec $k \in \mathbf{Z}$ et $0 < \alpha < \pi$.*

Démonstration On va utiliser le critère d'Abel (Théorème 3.11.2). Soit $x \notin 2\pi\mathbf{Z}$. Posons

$$S_n(x) = \sum_{j=0}^{n} e^{ijx} \qquad \text{et} \qquad S_n(-x) = \sum_{j=0}^{n} e^{-ijx}.$$

Comme $e^{ix} \neq 1$, on a

$$S_n(x) = \sum_{j=0}^{n} e^{ijx} = \sum_{j=0}^{n} (e^{ix})^j = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}.$$

On en déduit que

$$(*) \qquad |S_n(x)| \leq \frac{1 + |e^{i(n+1)x}|}{|1 - e^{ix}|} = \frac{2}{|1 - e^{ix}|}.$$

De même, on a

$$(**) \qquad |S_n(-x)| \leq \frac{2}{|1 - e^{-ix}|}.$$

Etant données les hypothèses faites sur $(c_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(c_{-n})_{n\in\mathbf{N}^*}$, le critère d'Abel (Théorème 3.11.2) montre alors que chacune des séries $\sum_{n\in\mathbf{N}} c_n e^{inx}$ et $\sum_{n\in\mathbf{N}} c_{-n} e^{-inx}$ converge.

Montrons maintenant la convergence uniforme de ces séries sur l'intervalle $[2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$. Soit $x \in [2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$. On a

$$\begin{aligned} |1 - e^{ix}|^2 &= |1 - \cos x + i \sin x|^2 = (1 - \cos x)^2 + \sin^2 x \\ &= 2(1 - \cos x) = 2\left(1 - \left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right) \\ &= 4 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

Pour $0 < a < \pi/2$, la fonction $y \mapsto \sin^2(y)$ atteint son minimum sur $[a, \pi - a]$ en $y = a$ (et $y = \pi - a$). On a donc, pour $x \in [2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$,

$$|1 - e^{ix}| \geq \geq 2 \left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|.$$

En utilisant l'inégalité $(*)$, il s'ensuit que que, pour *tout* x dans l'intervalle $[2k\pi+\alpha, 2(k+1)\pi-\alpha]$, on a

$$|S_n(x)| \leq \frac{2}{|1-e^{ix}|} \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|}.$$

La majoration du reste dans le critère d'Abel (Théorème 3.11.2) montre alors que, pour tout $2k\pi+\alpha \leq x \leq 2(k+1)\pi-\alpha$, on

$$(***) \qquad \left|\sum_{k=n}^{m} c_k e^{ikx}\right| \leq \frac{2}{\left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|}|c_{n+1}| \qquad \text{pour tous} \quad m > n \in \mathbf{N}^*.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{n\to+\infty} c_n = 0$, il existe N tel que

$$|c_{n+1}| \leq \frac{\left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|}{2}\varepsilon \qquad \text{pour tout} \quad n \geq N.$$

L'inégalité $(***)$ implique alors que, pour tout $2k\pi+\alpha \leq x \leq 2(k+1)\pi-\alpha$, on a

$$\left|\sum_{k=n}^{m} c_k e^{ikx}\right| \leq \varepsilon \qquad \text{pour tous} \quad m > n \geq N.$$

Par le critère de Cauchy de convergence uniforme (voir Théorème 2.2.7), ceci prouve la convergence uniforme de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ sur l'intervalle $[2k\pi+\alpha, 2(k+1)\pi-\alpha]$. ■

On a des résultats analogues de convergence des séries trigonométriques de terme général $a_n \cos nx + b_n \sin nx$.

Théorème 4.2.3 *(i) Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres complexes. Supposons que les séries de terme général $|a_n|$ et $|b_n|$ convergent. Alors la série trigonométrique de terme général $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ est normalement et donc uniformément convergente sur $\mathbf{R}$.*
(ii) Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des suites positives, décroissantes et tendant vers 0 quand $n \to +\infty$. Alors, pour tout $x \notin 2\pi\mathbf{Z}$, la série trigonométrique

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

est convergente. De plus, elle est uniformément convergente sur tout intervalle de la forme $[2k\pi+\alpha, 2(k+1)\pi-\alpha]$ avec $k \in \mathbf{Z}$ et $0 < \alpha < \pi$.

Exemple 4.2.4 (i) Soit $\alpha > 1$. Par le Théorème 4.2.3.i, les séries trigonométriques de terme général $\dfrac{\cos(nx)}{n^\alpha}$ et $\dfrac{\sin(nx)}{n^\alpha}$ sont uniformément convergentes sur $\mathbf{R}$.
(ii) Par le Théorème 4.2.3.ii, les séries trigonométriques de terme général $\dfrac{\cos(nx)}{n}$ et $\dfrac{\sin(nx)}{n}$ sont convergentes pour tout $x \notin 2\pi\mathbf{Z}$. Elles sont uniformément convergentes sur tout intervalle $[2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$ avec $k \in \mathbf{Z}$ et $0 < \alpha < \pi$. On remarquera que la série $\dfrac{\cos(nx)}{n}$ ne converge pas pour $x \in 2\pi\mathbf{Z}$: pour un tel x, elle coïncide avec la série harmonique $\sum_n \frac{1}{n}$.

Le théorème suivant montre qu'on peut associer à une série entière une famille de séries trigonométriques normalement convergentes sur $\mathbf{R}$.

Théorème 4.2.5 ***(Séries trigonométriques associées à une série entière)*** *Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence $R > 0$. Soit $r \in [0, R[$. La série trigonométrique de terme général $a_n r^n e^{inx}$ converge normalement sur* $\mathbf{R}$.

Démonstration Pour tout $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$, on a

$$|a_n r^n e^{inx}| \leq |a_n| r^n.$$

Par le Théorème 3.1.3, la série entière $\sum_n a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in D_R$; en particulier, la série de terme général $|a_n r^n|$ est convergente. L'assertion en découle. ■

Exemple 4.2.6 Considérons la série entière $1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} z^n$; son rayon de convergence est $R = 1$ et on a

$$1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} z^n = \frac{1+z}{1-z} \qquad \text{pour tout} \quad |z| < 1.$$

Soit $r < 1$. On a alors, en prenant $z = re^{ix}$:

$$1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{inx} = \frac{1+re^{ix}}{1-re^{ix}} \qquad \text{pour tout} \quad x \in \mathbf{R}.$$

Comme

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1+re^{ix}}{1-re^{ix}}\right)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}, \qquad \mathrm{Im}\left(\frac{1+re^{ix}}{1-re^{ix}}\right)=\frac{2r\sin x}{1-2r\cos x+r^2},$$

on obtient les expressions suivantes pour les sommes des séries trigonométriques de terme général $r^n\cos(nx)$ et $r^n\sin(nx)$, valables pour tout $x\in\mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} 1+2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n\cos(nx) &= \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2} \\ 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n\sin(nx) &= \frac{2r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}. \end{aligned}$$

4.3 Continuité, dérivabilité, intégration d'une série trigonométrique

Comme nous l'avons fait pour les séries entières, nous allons appliquer aux séries trigonométriques les théorèmes de la Section 2.5 portant sur la continuité, la dérivabilité et l'intégration de la somme d'une série uniformément convergente.

Théorème 4.3.1 ***(Continuité d'une série trigonométrique)*** *(i) Soient $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(c_{-n})_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres complexes telles que les séries de terme général $|c_n|$ et $|c_{-n}|$ soient convergentes. Alors la somme de la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_ne^{inx}$ est continue sur $\mathbf{R}$.*
(ii) Soient $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(c_{-n})_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites positives, décroissantes et tendant vers 0 quand $n\to+\infty$. Alors la somme de la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_ne^{inx}$ est continue sur $\mathbf{R}\setminus 2\pi\mathbf{Z}$.

Démonstration (i) Par le Théorème 4.2.1, la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_ne^{inx}$ est uniformément convergente sur $\mathbf{R}$. L'assertion est alors une conséquence du Théorème 2.5.1.
(ii) Par le Théorème 4.2.2, la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_ne^{inx}$ est uniformément convergente sur chaque intervalle $[2k\pi+\alpha, 2(k+1)\pi-\alpha]$ pour

tout $k \in \mathbf{Z}$ et tout $0 < \alpha < \pi$. Par le Théorème 2.5.1, la somme de cette série est donc continue sur tous ces intervalles. Comme

$$\mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z} = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}, 0<\alpha<\pi} [2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha],$$

ceci prouve l'assertion.■

Théorème 4.3.2 ***(Dérivation d'une série trigonométrique)*** *Soient $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(c_{-n})_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres complexes telles que les séries de terme général $|nc_n|$ et $|nc_{-n}|$ soient convergentes. Alors la somme s de la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{inx}$ est continûment dérivable sur $\mathbf{R}$ et s' est la somme de la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbf{Z}} inc_n e^{inx}$.*

Démonstration L'hypothèse entraîne que les séries de terme général $|c_n|$ et $|c_{-n}|$ sont convergentes. Par le Théorème 4.2.1, les séries trigonométriques $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{inx}$ et $\sum_{n\in\mathbf{Z}} inc_n e^{inx}$ convergent uniformément sur $\mathbf{R}$. Comme $x \mapsto inc_n e^{inx}$ est la dérivée de $x \mapsto c_n e^{inx}$, l'assertion découle donc du Théorème 2.5.5. ■

Théorème 4.3.3 ***(Primitive d'une série trigonométrique)*** *Soient $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(c_{-n})_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres complexes telles que les séries de terme général $|c_n|$ et $|c_{-n}|$ soient convergentes. Soit $s : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ la somme de série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{inx}$. Alors la somme de la série*

$$c_0 x + \sum_{n\in\mathbf{Z}^*} \frac{-ic_n}{n} e^{inx},$$

qui est convergente sur $\mathbf{R}$, est une primitive de s.

Démonstration Par le Théorème 4.2.1, la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{inx}$ converge vers s uniformément sur $\mathbf{R}$. Pour tout $n \in \mathbf{Z}^*$, on a

$$\int_0^x c_n e^{int} dt = \frac{-ic_n}{n} e^{inx} + \frac{ic_n}{n}$$

et pour $n = 0$, on a $\int_0^x c_0 dt = c_0 x$. Le Corollaire 2.5.4 montre alors la somme de la série

$$c_0 x + \sum_{n\in\mathbf{Z}^*} \left(\frac{-ic_n}{n} e^{inx} + \frac{ic_n}{n} \right)$$

est égale à $\int_0^x s(t)dt$. Cette primitive ne diffère que d'une constante de la série de l'assertion. ∎

On a bien sûr une version des trois théorèmes précédents pour des séries trigonométriques de terme général $a_n \cos nx + b_n \sin nx$.

Théorème 4.3.4 *(i) Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres complexes telles que les séries de terme général $|a_n|$ et $|b_n|$ soient convergentes. Alors la somme de la série trigonométrique de terme général $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ est continue sur $\mathbf{R}$.*
(ii) Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites positives, décroissantes et tendant vers 0 quand $n \to +\infty$. Alors la somme de la série trigonométrique de terme général $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ est continue sur $\mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$.

Théorème 4.3.5 *Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres complexes telles que les séries de terme général $|na_n|$ et $|nb_{-n}|$ soient convergentes. Alors la somme s de la série trigonométrique de terme général $a_n \cos(nx)+ b_n \sin(nx)$ est continûment dérivable sur $\mathbf{R}$ et s' est la somme de la série trigonométrique de terme général $-na_n \sin(nx) + nb_n \cos(nx)$*

Théorème 4.3.6 *Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres complexes telles que les séries de terme général $|a_n|$ et $|b_n|$ soient convergentes. Soit $s : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ la somme de la série trigonométrique de terme général $a_n \cos(nx)+b_n \sin(nx)$. Alors la somme de la série, de terme général $\frac{a_n}{n} \sin(nx)- \frac{b_n}{n} \cos(nx)$ pour $n \neq 0$ et a_0x pour $n = 0$, est une primitive de s.*

4.4 Développement en série trigonométrique

Jusquà présent, nous sommes parti d'une série trigonométrique et nous avons étudié la fonction définie par la somme de cette série. Dans cette section, nous partons d'une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$. Nous nous posons alors les questions suivantes :

1. Existe-t-il une série trigonométrique qui converge partout sur $\mathbf{R}$ et dont la somme soit égale à f?

2. Si la réponse à la question précédente est positive, cette série trigonométrique est-elle unique ?

Nous ne donnerons que des réponses partielles aux deux problèmes.

Observons d'abord que le problème 1 ne peut admettre de solution que si f est périodique de période 2π.

Proposition 4.4.1 *Soit $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{inx}$ une série trigonométrique simplement convergente sur $\mathbf{R}$. Alors sa somme $s : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est périodique de période 2π.*

Démonstration Ceci est évident car les fonctions $x \mapsto e^{inx}$ sont périodiques de période 2π.■

Dans la suite, nous aurons fréquemment besoin du résultat suivant.

Proposition 4.4.2 *Pour tout $m \in \mathbf{Z}$, on a*

$$\int_0^{2\pi} e^{imx}dx = \begin{cases} 0 \ \textit{si } m \neq 0 \\ 2\pi \ \textit{si } m = 0. \end{cases}$$

Démonstration Pour $m \neq 0$, on a

$$\int_0^{2\pi} e^{imx}dx = \left[\frac{e^{imx}}{im}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Pour $m = 0$, on a

$$\int_0^{2\pi} e^{imx}dx = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi.■$$

Le théorème suivant relie les coefficients d'une série trigonométrique uniformément convergente à sa somme.

Théorème 4.4.3 ***(Evaluation des coefficients d'une série trigonométrique)*** *Soit $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{inx}$ une série trigonométrique uniformément convergente sur $\mathbf{R}$. Soit $s : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ sa somme. Alors, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on a*

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s(x)e^{-inx}dx.$$

Démonstration Fixons $n \in \mathbf{N}$ et posons $f(x) = s(x)e^{-inx}$. Alors f est la somme de la série trigonométrique $\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{i(k-n)x}$. Comme $\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{ikx}$ est uniformément convergente vers s, il est clair que $\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{i(k-n)x}$ converge uniformément vers f. Par le Théorème 2.5.2, on a donc

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} s(x)e^{-inx}dx &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} c_k e^{i(k-n)x}dx \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)x}dx \\ &= 2\pi c_n,\end{aligned}$$

en utilisant les formules de la Proposition 4.4.2.■

Remarque 4.4.4 Comme s est 2π-périodique (Proposition 4.4.1), on peut dans le théorème précédent remplacer l'intégration sur $[0, 2\pi]$ par l'intégration sur n'importe quel intervalle de longueur 2π :

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} s(x)e^{-inx}dx$$

pour tout $a \in \mathbf{R}$. Ceci découle de la proposition suivante, qui est bien connue.

Proposition 4.4.5 *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction intégrable et T-périodique. Alors, pour tout $a \in \mathbf{R}$, on a*

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

Démonstration On a

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(x)dx &= \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx \\ &= -\int_0^a f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx.\end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que

$$\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx;$$

ceci est immédiat, en utilisant le changement de variable $y = x - T$ et la T-périodicité de f :

$$\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(y-T)dy = \int_0^a f(y)dy. \blacksquare$$

Voici l'analogue du Théorème 4.4.3 pour les séries trigonométriques de terme général $a_n \cos nx + b_n \sin nx$.

Théorème 4.4.6 *On suppose que la série trigonométrique de terme général $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ est uniformément convergente sur $\mathbf{R}$. Soit $s : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ sa somme. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} s(x)\cos(nx)dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} s(x)\sin(nx)dx$$

ainsi que $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s(x)dx$.

Démonstration Nous allons déduire ce résultat du Théorème 4.4.3 de la manière suivante. On écrit la série trigonométrique de terme général $a_n \cos(nx)+ b_n \sin(nx)$ sous la forme $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{inx}$; on a alors (voir Remarque 4.1.3) :

$$a_0 = c_0, \quad a_n = c_n + c_{-n},\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \qquad \text{pour tout} \quad n \geq 1.$$

Avec le Théorème 4.4.3, on a donc, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s(x)(e^{-inx} + e^{-inx})dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} s(x)\cos(nx)dx \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} b_n &= i(c_n - c_{-n}) \\ &= \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} s(x)(e^{-inx} - e^{-inx})dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} s(x)\sin(nx)dx. \end{aligned}$$

Pour $n = 0$, on a

$$a_0 = c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s(x)dx. \blacksquare$$

4.4.1 Séries de Fourier

Le Théorème 4.4.3 résout partiellement la question de l'unicité du développement en série trigonométrique . Il nous amène à introduire la définition suivante.

Définition 4.4.7 (Série de Fourier d'une fonction périodique) Soit $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C}$ une fonction 2π-périodique et absolument intégrable sur $[0, 2\pi]$. On appelle *série de Fourier* de f la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n(f)e^{inx}$ dont les coefficients sont données par les formules

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx \qquad \text{pour tout} \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Les $c_n(f)$ sont appelés les *coefficients de Fourier* de f. On notera $S_\infty(f)$ la série de Fourier de f.

Remarque 4.4.8 Ecrivons la série Fourier $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n(f)e^{inx}$ de f sous la forme d'une série de terme général $a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)$. Les $a_n(f)$ et $b_n(f)$ s'appellent également les coefficients de Fourier et on a (voir Théorème 4.4.6) les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx \qquad \text{pour tout} \quad n \geq 1,\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx \qquad \text{pour tout} \quad n \geq 1,\\
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx.
\end{aligned}$$

Remarque 4.4.9 Soit $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C}$ une fonction 2π-périodique et absolument intégrable sur $[0, 2\pi]$. La suite $(c_n(f))_{n\in\mathbf{Z}}$ est bornée. En effet, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on a

$$\begin{aligned}
|c_n(f)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)e^{-inx}|dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|dx.
\end{aligned}$$

Le même résultat est valable pour les suites $a_n(f)$ et $b_n(f)$. En fait, nous démontrerons plus tard (voir Théorème 4.4.12) un résultat plus fort : ces suites tendent vers 0 quand $|n| \to +\infty$.

4.4.2 Exemples de recherche d'une série de Fourier

Nous allons donner quelques exemples de détermination d'une série de Fourier. Pour cela, la remarque suivante nous sera très utile.

Remarque 4.4.10 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction 2π-périodique et intégrable sur un intervalle borné $[a, b]$. Si f est paire, alors on a, pour ses coefficients de Fourier,

$$c_{-n}(f) = c_n(f) \qquad \text{et} \qquad b_n(f) = 0 \qquad \text{pour tout} \quad n \in \mathbf{N}^*$$

Sa série de Fourier prend la forme

$$S_\infty(f)(x) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} 2c_n(f) \cos nx = a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \cos nx.$$

Si f est impaire, alors on a

$$c_{-n}(f) = -c_n(f) \qquad \text{et} \qquad a_n(f) = 0 \qquad \text{pour tout} \quad n \in \mathbf{N}.$$

Sa série de Fourier prend la forme

$$S_\infty(f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2ic_n(f) \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(f) \sin nx.$$

Exemple 4.4.11 (i) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = |x| \qquad \text{pour tout} \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Comme f est paire, $b_n(f) = 0$ et pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos(nx) dx \\
&= \frac{2}{\pi}[x \sin(nx)/n]_0^\pi - \frac{2}{\pi}\frac{1}{n} \int_0^\pi \sin(nx) dx \\
&= 0 - \frac{2}{n\pi}[-\cos(nx)/n]_0^\pi \\
&= -\frac{2}{n^2\pi}(1 - (-1)^n) \\
&= \begin{cases} \frac{4}{n^2\pi} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}
\end{aligned}$$

On a aussi

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}.$$

La série de Fourier de f est donc

$$\begin{aligned} S_\infty(f)(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

Cette série converge normalement sur $\mathbf{R}$. Il n'est cependant pas clair si elle coïncide avec f.
(ii) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $f(k\pi) = 0$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$ et

$$f(x) = \text{sgn } (x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in]0, \pi[\\ -1 \text{ si } x \in]-\pi, 0[\end{cases}$$

Comme f est impaire, $a_n(f) = 0$ et pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx \\ &= \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \end{aligned}$$

La série de Fourier de f est donc

$$S_\infty(f)(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)} = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots \right).$$

4.4.3 Lemme de Riemann-Lebesgue

Le problème d'existence d'un développement d'une fonction donnée f sous forme d'une série trigonométrique peut se poser ainsi : la série de Fourier de f est-elle convergente de somme f? Nous donnerons quelques réponses partielles à cette question. Nous aurons besoin pour cela du résultat suivant. Rappellons qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbf{C}$ est continue par morceaux sur un intervalle borné $[a, b]$, s'il existe une partition

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

de $[a,b]$ telle que la restriction $f|_{]x_k,x_{k+1}[}$ de f à chaque sous-intervalle $]x_k,x_{k+1}[$ est continue et telle que les limites à gauche et à droite $f(x_k+)$ et $f(x_{k+1}-)$ existent, pour tout $0 \leq k \leq n-1$.

Théorème 4.4.12 ***(Lemme de Riemann-Lebesgue)*** *Soit $f : [a,b] \to \mathbf{C}$ une fonction continue par morceaux sur un intervalle borné $[a,b]$. On a alors*

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty} \int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx = 0$$

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty} \int_a^b f(x)\cos(\lambda x)dx = 0$$

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty} \int_a^b f(x)\sin(\lambda x)dx = 0.$$

Démonstration On considérant séparément la partie réelle et la partie imaginaire de f, on peut supposer que f est à valeurs réelles. Comme

$$\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx = \int_a^b f(x)\cos(\lambda x)dx + i\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)dx,$$

il suffit de montrer que $\lim_{\lambda\to\pm\infty} \int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx = 0$.

• **1ère étape :** supposons que f est une fonction en escalier, c-à-d qu'il exite une subdivision

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

de $[a,b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]x_k,x_{k+1}[$; notons α_k la valeur de f dans $]x_k,x_{k+1}[$. On a alors

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)e^{i\lambda x}dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\int_{x_k}^{x_{k+1}} e^{i\lambda x}dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\frac{e^{i\lambda x_{k+1}}-e^{i\lambda x_k}}{i\lambda}.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\left|\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{2|\alpha_k|}{|\lambda|} = \frac{2}{|\lambda|}\sum_{k=0}^{n-1}|\alpha_k|$$

et on a bien

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty}\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx = 0.$$

• **2ème étape :** supposons f continue par morceaux quelconque. Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe une fonction en escalier g sur $[a,b]$ telle que

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)| \leq \varepsilon.$$

Par la première étape, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\left|\int_a^b g(x)e^{i\lambda x}dx\right| \leq \varepsilon \qquad \text{pour tout} \quad |\lambda| \geq N.$$

D'autre part, pout tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx - \int_a^b g(x)e^{i\lambda x}dx\right| = \\
&= \left|\int_a^b (f(x)-g(x))e^{i\lambda x}dx\right| \leq \\
&\leq \int_a^b |(f(x)-g(x))e^{i\lambda x})|dx = \\
&= \int_a^b |f(x)-g(x)|dx \leq \\
&\leq \int_a^b \varepsilon dx = (b-a)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que, pour $|\lambda| \geq N$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx\right| \\
&= \left|\left(\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx - \int_a^b g(x)e^{i\lambda x}dx\right) + \int_a^b g(x)e^{i\lambda x}dx\right| \\
&\leq \left|\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx - \int_a^b g(x)e^{i\lambda x}dx\right| + \left|\int_a^b g(x)e^{i\lambda x}dx\right| \\
&\leq (b-a)\varepsilon + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ceci prouve bien que

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} \int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx = 0.\blacksquare$$

Le lemme de Riemann-Lebesgue (Théorème 4.4.12) admet comme cas particulier le corollaire suivant portant sur le comportement asymptotique des coefficients de Fourier d'une fonction périodique.

Corollaire 4.4.13 ***(Lemme de Riemann-Lebesgue : bis)*** *Soit* $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C}$ *une fonction* 2π*-périodique et continue par morceaux sur* $[0, 2\pi]$*. Alors, pour la suite de ses coefficients de Fourier* $(c_n(f))_{n\in\mathbf{Z}}$*,* $(a_n(f))_{n\in\mathbf{N}}$ *et* $(b_n(f))_{n\in\mathbf{N}^*}$*, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} c_n(f) = \lim_{n\to+\infty} c_{-n}(f) = 0.$$

ainsi que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n(f) = \lim_{n\to+\infty} b_n(f) = 0.\blacksquare$$

4.5 Théorème de Dirichlet

Soit $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C}$ une fonction 2π-périodique et intégrable sur $[0, 2\pi]$. Dans cette section, nous allons montrer, que sous certaines hypothèses sur f, la série de Fourier $S_\infty(f)$ converge vers f.

Pour cela, nous aurons besoin d'introduire et d'étudier les noyaux de Dirichlet.

4.5.1 Le noyau de Dirichlet

Définition 4.5.1 Soit $n \in \mathbf{N}$. On appelle *noyau de Dirichlet* d'ordre n la fonction $D_n : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ définie par

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}.$$

Voici quelques propriétés immediates de D_n.

Proposition 4.5.2 *(i)* D_n *est* 2π*-péridodique ;*
(ii) D_n *est une fonction paire ;*
(ii) $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)dx = 1$.

Démonstration Les point (i) et (ii) sont immédiats. Le point (iii) découle des formules de la Proposition 4.4.2, en tenant compte de la Remarque 4.4.4. ■

L'importance des noyaux de Dirichlet provient de leur lien avec les sommes partielles des séries de Fourier. Soit $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C}$ une fonction 2π-périodique et intégrable sur $[0, 2\pi]$. Pour $n \in \mathbf{N}$, notons $S_n(f)$ la n-ième somme partielle de la série de Fourier de f :

$$S_n(f)(x) = c_0(f) + \sum_{k=1}^{n} \left(c_k(f)e^{ikx} + c_{-k}(f)e^{-ikx} \right) \qquad \text{pour tout} \quad x \in \mathbf{R}.$$

Proposition 4.5.3 *Pour tout* $x_0 \in \mathbf{R}$ *et tout* $n \in \mathbf{N}$, *on a*

$$S_n(f)(x_0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + x)D_n(x)dx.$$

Démonstration On a

$$\begin{aligned}
S_n(f)(x_0) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx_0} \\
&= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx_0} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \left(\sum_{k=-n}^{n} e^{-ik(x-x_0)} \right) dx \\
&= \int_0^{2\pi} f(x)D_n(x - x_0)dx \\
&= \int_{-x_0}^{-x_0+2\pi} f(x_0 + x)D_n(x)dx.
\end{aligned}$$

Comme $x \mapsto f(x_0 + x)D_n(x)$ est 2π-périodique, il s'ensuit que (voir Remarque 4.4.4)

$$S_n(f)(x_0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + x)D_n(x)dx. ■$$

On observera que

$$D_n(x) = \frac{2n+1}{2\pi} \qquad \text{pour tout} \quad x \in 2\pi\mathbf{Z}.$$

Donnons une expression pour $D_n(x)$ pour $x \notin 2\pi\mathbf{Z}$.

Proposition 4.5.4 *Pour $x \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$, on a*

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Démonstration Comme $e^{ix} \neq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} &= e^{-inx} \sum_{k=0}^{2n} e^{ikx} \\
&= e^{-inx} \frac{1 - e^{i(2n+1)x}}{1 - e^{ix}} \\
&= e^{-inx} \frac{e^{i(2n+1)x-1}}{e^{ix} - 1} \\
&= e^{-inx} \frac{e^{inx}\left(e^{i(n+1)x} - e^{-inx}\right)}{e^{ix/2}\left(e^{ix/2} - e^{-ix/2}\right)} \\
&= e^{-ix/2} \frac{\left(e^{i(n+1)x} - e^{-inx}\right)}{\left(e^{ix/2} - e^{-ix/2}\right)} \\
&= \frac{e^{i(n+1/2)x} - e^{-i(n+1/2)x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} \\
&= \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sin \frac{x}{2}}. \blacksquare
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant démontrer la propriété-clé des noyaux de Dirichlet.

Proposition 4.5.5 *Soit $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C}$ une fonction 2π-périodique et continue par morceaux. On suppose que*

$$\lim_{h \to 0, h > 0} \frac{f(h) - f(0+)}{h} \qquad et \qquad \lim_{h \to 0, h < 0} \frac{f(h) - f(0-)}{h}$$

existent. Alors

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) D_n(x) dx = \frac{1}{2} \, [f(0+) - f(0-)].$$

Démonstration Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Comme $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)dx = 1$, on a

$$f(0+) = \int_{-\pi}^{\pi} f(0+) D_n(x) dx$$

et, comme D_n est paire (Proposition 4.5.2), il s'ensuit que

$$\frac{f(0+)}{2} = \int_0^\pi f(0+)D_n(x)dx.$$

En utilisant la formule pour D_n de la Proposition 4.5.4, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)D_n(x)dx - \frac{f(0+)}{2} &= \int_0^\pi (f(x) - f(0+))\, D_n(x)dx \\ &= \int_0^\pi \frac{f(x) - f(0+)}{x} \frac{x}{\sin(x/2)} \sin\left((n+\frac{1}{2})x\right) dx.\end{aligned}$$

Posons $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(0+)}{x}\dfrac{x}{\sin(x/2)}$ pour $x \neq 0$. La fonction φ ainsi définie est continue sur $]0, \pi]$. Par l'hypothèse sur f, la limite $\lim_{x\to 0, x>0} \varphi(x)$ existe. Il s'ensuit que la fonction φ se prolonge en une fonction continue sur $[0, \pi]$. Nous pouvons donc appliquer le Lemme de Riemann-Lebesgue (Théorème 4.4.12) à la fonction φ et obtenir :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^\pi f(x)D_n(x)dx - \frac{f(0+)}{2}\right) &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi \varphi(x) \sin\left((n+\frac{1}{2})x\right) dx \\ &= 0.\end{aligned}$$

On montre de même que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^0 f(x)D_n(x)dx = \frac{f(0-)}{2}. \blacksquare$$

4.5.2 Le Théorème de Dirichlet

Concernant le développement en série trigonométrique des fonctions périodiques, le résultat principal que nous demontrerons dans ce cours est le théorème suivant, dû à Dirichlet.

Théorème 4.5.6 ***(Théorème de Dirichlet)*** *Soit $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C}$ une fonction 2π-périodique et continue par morceaux. Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. On suppose que*

$$\lim_{h\to 0, h>0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0+)}{h} \quad \textit{et} \quad \lim_{h\to 0, h>0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0-)}{h}$$

existent. Alors la série de Fourier de f converge au point x_0 et a pour somme

$$\frac{1}{2}\,[f(x_0+) + f(x_0-)].$$

Démonstration Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a (Proposition 4.5.3)

$$S_n(f)(x_0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + x) D_n(x) dx.$$

Introduisons la fonction $g : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C}$ définie par $g(x) = f(x_0 + x)$. Alors

$$\begin{aligned}
g(0+) &= \lim_{x\to 0, x>0} g(x) = f(x_0+);\\
g(0-) &= \lim_{x\to 0, x<0} g(x) = f(x_0-);\\
\lim_{h\to 0, h>0} \frac{g(h) - g(0+)}{h} &= \lim_{h\to 0, h>0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0+)}{h};\\
\lim_{h\to 0, h<0} \frac{g(h) - g(0-)}{h} &= \lim_{h\to 0, h>0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0-)}{h}.
\end{aligned}$$

La fonction g satisfait donc aux hypothèses de la Proposition 4.5.5 et il s'ensuit que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) D_n(x) dx = \frac{1}{2}\,[g(0+) - g(0-)].$$

Ceci signifie que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + x) D_n(x) dx = \frac{1}{2}\,[f(x_0+) - f(x_0-)].\blacksquare$$

Corollaire 4.5.7 *Soit $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C}$ une fonction 2π-périodique et continue par morceaux. On suppose que f est dérivable en x_0. Alors la série de Fourier $S_\infty(f)$ de f converge au point x_0 vers $f(x_0)$.* $\blacksquare$.

Exemple 4.5.8 (i) Reprenons la fonction 2π-périodique $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = |x|$ (voir Exemple 4.5.8.i). Cette fonction vérifie les hypothèses du théorème de Dirichlet pour tout $x \in \mathbf{R}$. Nous avons vu que sa série de Fourier est

$$S_\infty(f)(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}.$$

On obtient donc l'identité remarquable

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2} \qquad \text{pour tout} \quad x \in [-\pi, \pi].$$

En particulier, pour $x = 0$, nous obtenons

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

D'autre part, comme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2},$$

on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}\\ &= \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{4}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\\ &= \frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

(ii) Reprenons la fonction 2π-périodique $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie sur $[-\pi, \pi]$ par par $f(x) = \mathrm{sgn}\ (x)$ (voir Exemple 4.5.8.ii). Cette fonction vérifie les hypothèses du théorème de Dirichlet pour tout $x \in \mathbf{R}$. Nous avons vu que sa série de Fourier est

$$S_\infty(f)(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)}.$$

On obtient donc l'identité remarquable

$$\mathrm{sgn}\ (x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)} \qquad \text{pour tout} \quad x \in]-\pi, \pi[.$$

En particulier, pour $x = \pi/2$, nous obtenons une identité que nous avons déjà rencontrée (voir Exemple 3.11.6) :

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\end{aligned}$$

On observera que, pour $x = \pm\pi$, on a bien

$$S_\infty(f)(x) = 0 = \frac{1}{2}\,[f(x+) + f(x-)].$$

4.6 Convergence uniforme des séries de Fourier : cas des fonctions C^2

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction 2π-périodique satisfaisant aux hypothèses du Théorème de Dirichlet (Théorème 4.5.6). On peut montrer que sa série de Fourier S_∞ converge uniformément sur tout intervalle $[a, b]$ ne contenant aucun point de discontinuité de F. Nous nous contenterons d'un résultat plus faible ici, sous l'hypothèse supplémentaire de l'existence et la continuité de la dérivée seconde de f.

Proposition 4.6.1 *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction 2π-périodique et continûment dérivable sur $\mathbf{R}$. On a*

$$c_n(f') = inc_n(f) \qquad \textit{pour tout} \quad n \in \mathbf{Z},$$

où $(c_n(f))_{n\in\mathbf{Z}}$ est la suite des coefficients de Fourier de f.

Démonstration Soit $n \in \mathbf{Z}^*$. En effectuant une intégration par parties et en tenant compte de la 2π-périodicité de f, on a

$$\begin{aligned}c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[f(x)\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\frac{1}{-in}\int_0^{2\pi} f'(x)e^{-inx}dx \\ &= 0 - in\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)e^{-inx}dx \\ &= \frac{1}{in}c_n(f').\end{aligned}$$

Pour $n = 0$, on a

$$\begin{aligned} c_0(f') &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(x)dx \\ &= \frac{1}{2\pi} [f(x)]_0^{2\pi} \\ &= 0. \blacksquare \end{aligned}$$

On a des formules analogues pour les coefficients de Fourier de f quand on écrit sa série de Fourier sous la forme

$$a_0(f) + \sum_{n\geq 1} a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx).$$

Proposition 4.6.2 *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ comme dans Proposition 4.6.1. On a*

$$a_n(f') = nb_n(f), \qquad b_n(f') = -na_n(f) \qquad \textit{pour tout} \quad n \in \mathbf{N}.$$

Démonstration Ceci découle de la Proposition 4.6.1 et des formules liant $a_n(f)$ et $b_n(f)$ avec $c_n(f)$ (voir Remarque 4.1.3). $\blacksquare$

Corollaire 4.6.3 *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction 2π-périodique. On suppose que f est deux fois continûment dérivable. Alors les séries de termes général $|c_n(f)|$ et $|c_{-n}(f)|$ sont convergentes.*

Démonstration Soit $n \in \mathbf{Z}$. En appliquant la Proposition 4.6.1 à f et à f' on a

$$\begin{aligned} c_n(f'') &= inc_n(f') \\ &= i^2n^2c_n(f) \\ &= -n^2c_n(f). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$|c_n(f)| = \frac{|c_n(f'')|}{n^2} \qquad \text{pour tout} \quad n \in \mathbf{Z}^*.$$

D'autre part, on sait que la suite des coefficients de Fourier d'une fonction absolument intégrable sur $[0, 2\pi]$ est bornée (voir Remarque 4.4.9). L'assertion en découle. $\blacksquare$

Théorème 4.6.4 *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction 2π-périodique. On suppose que f est deux fois continûment dérivable. Alors sa série de Fourier $S_\infty(f)$ converge vers f uniformément sur* $\mathbf{R}$.

Démonstration Par le Corollaire 4.6.3, les séries de terme général $|c_n(f)|$ et $|c_{-n}(f)|$ sont convergentes. Il s'ensuit que la série de Fourier $S_\infty(f)$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbf{R}$ (voir Théorème 4.2.1). D'autre part, par le Théorème de Dirichlet (Théorème 4.5.6), $S_\infty(f)$ converge simplement vers f. Il s'ensuit que $S_\infty(f)$ converge vers f uniformément sur $\mathbf{R}$.■

4.7 Exercices

Exercice 4.7.1 (Etude d'une série trigonométrique)

On considère la série trigonométrique de terme général $u_n(x) = \dfrac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$.

(i) Montrer que cette série trigonométrique est uniformément convergente sur $\mathbf{R}$.

(ii) Montrer que la somme $s : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de cette série est continûment dérivable sur $\mathbf{R}$ et calculer sa dérivée s' sous forme de série trigonométrique.

(iii) Déterminer une primitive de s sous forme de série trigonométrique.

Exercice 4.7.2 (Etude d'une série trigonométrique)

On considère la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbf{Z}^*} e^{inx}/i\sqrt{|n|}$.

(i) Ecrire cette série trigonométrique sous la forme $a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n \cos nx + b_n \sin nx$.

(ii) Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de cette série trigonométrique.

Exercice 4.7.3 (Détermination d'une série de Fourier) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = x^2 \qquad \text{pour tout} \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Calculer la série de Fourier $S_\infty(f)$ de f, déterminer son domaine de convergence et étudier sa convergence.

Exercice 4.7.4 (Détermination d'une série de Fourier) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = x \qquad \text{pour tout} \quad x \in [0, 2\pi].$$

Calculer la série de Fourier $S_\infty(f)$ de f, déterminer son domaine de convergence et étudier sa convergence.

Exercice 4.7.5 (Détermination d'une série de Fourier) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = e^x \qquad \text{pour tout} \quad x \in [0, 2\pi].$$

Calculer la série de Fourier $S_\infty(f)$ de f, déterminer son domaine de convergence et étudier sa convergence.

Exercice 4.7.6 (Détermination d'une série de Fourier) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = \sinh x \qquad \text{pour tout} \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Calculer la série de Fourier $S_\infty(f)$ de f, déterminer son domaine de convergence et étudier sa convergence.

Exercice 4.7.7 (Détermination d'une série de Fourier) Soit $\alpha \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Z}$. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = \cos(\alpha x) \qquad \text{pour tout} \quad x \in [0, 2\pi].$$

Calculer la série de Fourier $S_\infty(f)$ de f, déterminer son domaine de convergence et étudier sa convergence.

Exercice 4.7.8 (Détermination d'une série de Fourier) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = \pi - x \qquad \text{pour tout} \quad x \in [0, 2\pi].$$

Calculer la série de Fourier $S_\infty(f)$ de f, déterminer son domaine de convergence et étudier sa convergence.

Exercice 4.7.9 (Détermination d'une série de Fourier) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } x \in [-\pi, 0] \\ x \text{ si } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Calculer la série de Fourier $S_\infty(f)$ de f, déterminer son domaine de convergence et étudier sa convergence.

Exercice 4.7.10 (Détermination d'une série de Fourier) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } x \in [-\pi, 0] \\ 1 \text{ si } x \in]0, \pi] \end{cases}$$

Calculer la série de Fourier $S_\infty(f)$ de f, déterminer son domaine de convergence et étudier sa convergence.

Exercice 4.7.11 (Détermination d'une série de Fourier) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = |\sin x| \qquad \text{pour tout} \quad x \in [0, 2\pi].$$

Calculer la série de Fourier $S_\infty(f)$ de f, déterminer son domaine de convergence et étudier sa convergence.

Exercice 4.7.12 (Détermination d'une série de Fourier) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = |\cos x| \qquad \text{pour tout} \quad x \in [0, 2\pi].$$

Calculer la série de Fourier $S_\infty(f)$ de f, déterminer son domaine de convergence et étudier sa convergence.

Exercice 4.7.13 (Détermination d'une série de Fourier) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction 2π-périodique définie, pour $0 < a < \pi$, par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} \text{ si } x \in [-a, a] \\ 0 \text{ si } x \in [-\pi, -a[\cup]a, \pi]. \end{cases}$$

Calculer la série de Fourier $S_\infty(f)$ de f, déterminer son domaine de convergence et étudier sa convergence.

Exercice 4.7.14 (Séries trigonométriques solutions d'une équation différentielle) On considère une série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{inx}$ telle que les séries de terme général $n^2|c_n|$ et $n^2|c_{-n}|$ convergent.
(i) Montrer que $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{inx}$ converge uniformément sur $\mathbf{R}$.
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ la somme de cette série.
(ii) Montrer que f est deux fois continûment dérivable.
On suppose que f est solution de l'équation différentielle $(*)$ suivante :

$$(*) \qquad y'' + e^{ix}\, y = 0.$$

(iii) Montrer que $c_n = 0$ pour tout $n < 0$ et $c_n = \dfrac{1}{(n!)^2} c_0$ pour tout $n \geq 1$.
(iv) Vérifier que la somme f de la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbf{N}} \dfrac{1}{(n!)^2} e^{inx}$ est bien deux fois continûment dérivable et qu'elle est solution de l'équation différentielle $(*)$.

Exercice 4.7.15 (Coefficients de Fourier d'une fonction translatée) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction 2π-périodique et soit $a \in \mathbf{R}$. On définit la fonction translatée $\tau_a(f)$ par

$$\tau_a(f)(x) = f(x + a).$$

(i) Vérifier que $\tau_a(f)$ est 2π-périodique.
(ii) Calculer les coefficients de Fourier $c_n(\tau_a(f))$ de $\tau_a(f)$ en fonction de ceux de f.

Exercice 4.7.16 (Coefficients de Fourier d'une fonction hölderienne) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction 2π-périodique. Soit $\alpha > 0$ un nombre reéel. On suppose que f est hölderienne d'exposant α pour un nombre reél $\alpha > 0$, c-à-d qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \qquad \text{pour tous} \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

Soit $n \in \mathbf{Z}^*$.
(i) Pour $a = \pi/n$, calculer $c_n(f - \tau_a(f))$, où $\tau_a(f)$ est la fonction translatée comme dans l'Exercice 4.7.15.
(ii) Déduire de (i) qu'il existe une constante M telle que

$$|c_n(f)| \leq \frac{M}{|n|^\alpha} \qquad \text{pour tout} \quad n \in \mathbf{Z}^*.$$

Exercice 4.7.17 (Coefficients de Fourier d'une fonction régulière) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction 2π-périodique. On suppose que f est p-fois continûment dérivable pour un entier $p \geq 1$. Soit $n \in \mathbf{Z}$. Exprimer le coefficient de Fourier $c_n(f^{(p)})$ en fonction de $c_n(f)$.

Exercice 4.7.18 (Décroissance des coefficients de Fourier et régularité) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction 2π-périodique.
(i) On suppose que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$. Montrer que, pour tout entier p, les suites $(n^p|c_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(n^p|c_{-n}|)_{n\in\mathbf{N}}$ sont bornées.
[*Indication :* utiliser l'Exercice 4.7.17.]
(ii) On suppose que la série de Fourier de f converge simplement vers f sur $\mathbf{R}$ et que, pour tout entier p, les séries de terme général $(n^p|c_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(n^p|c_{-n}|)_{n\in\mathbf{N}}$ sont bornées. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$.