# Théorème du point fixe de Markov-Kakutani: applications à l'existence de mesures de Haar et aux chaines de Markov

Bachir Bekka

14 Novembre 2005

On donne quelques exemples d'utilisation d'une version faible du théorème du point fixe de Markov-Kakutani (celle concernant une seule application). Tout d'abord, on montre que l'existence d'une mesure de Haar sur tout groupe compact (non nécessairement commutatif!) est une conséquence directe de ce théorème. Une application en est donnée à l'étude des sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$. On montrera aussi que l'existence de mesures invariantes pour les chaines de Markov finies peut être déduite du théorème du point fixe.

## 1 Théorème du point fixe de Markov-Kakutani: version faible

Soit $E$ un espace vectoriel normé (réel ou complexe). On note $E'$ l'espace dual de $E$, espace des formes linéaires continues sur $E$. Muni de la norme habituelle des applications linéaires continues, $E'$ est un espace de Banach. On rappelle (Théorème d'Alaoglu-Banach-Bourbaki) que les parties convexes, bornées et fermées de $E'$ sont compactes pour la topologie $*$-faible sur $E'$.

Si $K$ est une partie convexe de $E'$, une application $T : K \to K$ est une transformation affine si

$$T(tx + (1-t)y) = tT(x) + (1-t)T(y), \qquad \forall x, y \in K,\ 0 \le t \le 1.$$

**Théorème 1** ***(Markov-Kakutani: version faible)*** *Soit $E$ un espace vectoriel normé et $K$ une partie convexe, bornée, fermée et non vide de $E'$. Soit $T : K \to K$ une application affine et continue pour la topologie $*$-faible. Alors $T$ possède un point fixe dans $K$.*

**Preuve** Dans toute la preuve, $K$ sera muni *exclusivement* de la topologie topologie $*$-faible. On fixe un point $x_0 \in K$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère le point

$$x_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} T^i(x_0).$$

Comme $K$ est convexe, $x_n \in K$. Comme $K$ est compact, l'ensemble

$$C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{x_m \ : \ m \geq n\}},$$

intersection d'une suite décroissante de parties fermées (toujours pour la topologie $*$-faible, les adhérences étant prises dans cette topologie), est non vide. Soit $x \in C$. Alors $Tx = x$. En effet, soit $v \in E$. Comme $K$ est borné, $C = \sup_{y\in K} |y(v)|$ est fini. Fixons $n \in \mathbb{N}$ et posons $A_n = \{x_m \ : \ m \geq n\}$. Pour tout $x_m \in A_n$, on a

$$|(Tx_m - x_m)(v)| = \frac{1}{m+1}|T^{m+1}x(v) - x(v)| \leq \frac{2C}{m} \leq \frac{2C}{n}.$$

Par définition de la topologie $*$-faible et la continuité de $T$, la fonction $y \mapsto |(Ty - y)(v)|$ est continue sur $K$. Comme $x \in \overline{A_n}$, par définition de $C$, il s'ensuit que

$$|(Tx - x)(v)| \leq \frac{2C}{n}.$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $Tx(v) = x(v)$. Comme $v \in E$ était arbitraire, il s'ensuit que $Tx = x$. ■

# 2 Mesure de Haar

Soit $G$ un groupe topologique et $\mathcal{F}$ la tribu des boréliens de $G$. Une *mesure de Haar* $\mu$ sur $G$ est une mesure non nulle sur $\mathcal{F}$ qui est invariante par translation à gauche, c-à-d

$$\mu(gA) = \mu(A), \qquad \text{pour tout } A \in \mathcal{F} \text{ et tout } g \in G,$$

et qui est régulière, c-à-d $\mu(K) < \infty$ pour tout compact $K \subset G$. Quand $G$ est compact, on exige de plus que $\mu$ soit *normalisée*, c-à-d que $\mu$ est une mesure de probabilité.

**Théorème 2** *Soit $G$ un groupe compact possèdant une base dénombrable de la topologie. Alors il existe une unique mesure de Haar normalisée $\mu$ sur $G$. De plus, $\mu$ est également invariante par translation à droite.*

**Preuve** Soit $E = C(G)$ l'espace vectoriel des fonctions continues $f : G \to \mathbb{R}$, muni de la norme $f \mapsto \|f\|_\infty$. L'espace $\text{Prob}(G)$ des mesures de probabilité sur $G$ s'identifie à la partie de $E'$ formée des $\varphi \in E'$ telles que $\varphi(f) \geq 0$ pour toute fonction positive $f \in C(G)$ et telles que $\varphi(1_G) = 1$ : toute $\mu \in \text{Prob}(G)$ définit une telle forme linéaire sur $C(G)$, notée encore $\mu$, par

$$\mu(f) = \int_G f(x)\mu(dx), \qquad \forall f \in C(G).$$

Chaque élément $g \in G$ définit une transformation affine $g\mu : \text{Prob}(G) \to \text{Prob}(G)$ donnée par

$$g\mu(f) = \mu({}_g f), \qquad \forall f \in C(G),$$

où ${}_g f \in C(G)$ est la fonction ${}_g f(x) = f(gx)$. Alors $\mu \in \text{Prob}(G)$ est une mesure de Haar si et seulement si $g\mu = \mu$ pour tout $g \in G$.

Il est clair que $\text{Prob}(G)$ est une partie convexe et fermée de $E'$. De plus, elle est bornée, car $\|\mu\| = \mu(1_G) = 1$ pour toute $\mu \in \text{Prob}(G)$.

Comme $G$ possède une base dénombrable de la topologie, il existe une suite $(g_n)_{n\geq 1}$ dense d'éléments de $G$. Soit $T : \text{Prob}(G) \to \text{Prob}(G)$ définie par

$$T(\mu) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} g_n\mu \qquad \forall \mu \in \text{Prob}(G).$$

Alors $T$ est affine et continue pour la topologie $*$-faible sur $\text{Prob}(G)$. Par le Théorème 1, $T$ fixe donc une mesure dans $\mu \in \text{Prob}(G)$. On a alors

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} g_n\mu(f) = \mu(f)$$

ou bien encore

$$(*) \textstyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \int_G f(g_n x)\mu(dx) = \int_G f(x)\mu(dx) \qquad \forall f \in C(G).$$

On va montrer que $\mu$ est une mesure de Haar. En effet, soit $f \in C(G)$. Considérons la fonction $F$ sur $G$ définie par

$$F(g) = g\mu(f) = \int_G f(gx)\mu(dx) \qquad \forall g \in G.$$

La continuité uniforme de $f$ montre que $F \in C(G)$. Par la propriété $(*)$, on a, pour tout $g \in G$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} F(gg_n) =& \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \int_G f(gg_n x)\mu(dx) \\
=& \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \int_G ({}_g f)(g_n x)\mu(dx) \\
=& \int_G ({}_g f)(x)\mu(dx) \\
=& \int_G f(gx)\mu(dx) \\
=& F(g).
\end{aligned}$$

La fonction continue $F$ sur le compact $G$ atteint son maximum en un point $g_0 \in G$. Ce qui précède implique que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} F(g_0 g_n) = F(g_0).$$

Il s'ensuit que $F(g_0 g_n) = F(g_0)$ pour tout $n \geq 1$. Comme $(g_n)_n$ est dense dans $G$ et par continuité de $F$, on a donc $F(g_0 g) = F(g_0)$ pour tout $g \in G$, c-à-d $F$ est constante sur $G$. Ceci signifie que

$$g\mu(f) = F(g) = F(e) = \mu(f) \qquad \forall g \in G.$$

Donc $\mu$ est invariante par translation à gauche.

Considérons maintenant la fonction

$$\widetilde{F}(g) = \mu(f_g) = \int_G f(xg)\mu(dx) \qquad \forall g \in G,$$

où $f_g$ est la fonction $f_g(x) = f(xg)$ sur $G$. Le même raisonnement que précédemment montre que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \widetilde{F}(g_n g) = \widetilde{F}(g)$$

et donc que $\mu(f_g) = \mu(f)$ pour tout $g \in G$. La mesure $\mu$ est ainsi également invariante par translation à droite.

Pour montrer l'unicité de $\mu$, soit $\nu \in \mathrm{Prob}(G)$ une autre mesure de probabilité invariante par translation à gauche. Alors, pour tout $f \in C(G)$, on a, d'une part,

$$\int_G \int_G f(xy)\mu(dx)\nu(dy) = \int_G f(x)\nu(dx)$$

car $\mu$ est invariante par translation à droite et, par Fubini, on a d'autre part,

$$\int_G \int_G f(xy)\mu(dx)\nu(dy) = \int_G f(y)\mu(dy)$$

car $\nu$ est invariante par translation à gauche. Ceci montre que $\nu = \mu$. ■

**Remarques 3** (i) Une mesure de Haar existe pour tout groupe *localement compact*. De plus elle est unique, à un multiple près; voir par exemple A. Weil: *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Hermann, 1965.

(ii) Dans la pratique, c'est l'assertion concernant l'*unicité* de la mesure de Haar qui est la plus utile. En effet, pour des groupes donnés explicitement, l'*existence* d'une mesure de Haar est souvent facile à établir directement. Par exemple (voir aussi la Section 3), soit $G$ un groupe de Lie (i.e. $G$ possède une structure de variété pour laquelle les opérations de groupe sont différentiables). Une mesure de Haar sur $G$ s'obtient ainsi. Soit $n = \dim G$ et fixons une forme $n$-linéaire alternée $\omega_e \neq 0$ sur l'espace tangent $T_e(G)$ à $G$ en l'élement neutre $e$. Pour tout $g \in G$, soit $\omega_g$ la forme $n$-linéaire alternée sur $T_g(G)$ qui est l'image de $\omega_e$ par la translation à gauche par $g^{-1}$. De cette manière, on obtient une $n$-forme $\omega$ on $G$ qui est invariante par translation à gauche. Cette $n$-forme, qui est partout $\neq 0$, détermine une forme volume; c'est la mesure de Haar cherchée.

Voici une application de l'existence d'une mesure de Haar à l'étude des sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$.

**Corollaire 4** *Soit $G$ un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ Alors $G$ est conjugué à un sous-groupe du groupe orthogonal $O(n)$.*

**Preuve** Soit $\mu$ une mesure de Haar normalisée de $G$. Soit $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. On définit un nouveau produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle_G$ sur $\mathbb{R}^n$

par

$$\langle x|y\rangle_G = \int_G \langle gx|gy\rangle\, \mu(dg) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

L'invariance de $\mu$ montre que $\langle\cdot|\cdot\rangle_G$ est $G$-invariant, c-à-d $\langle gx|gy\rangle_G = \langle x|y\rangle_G$ pour tous $g \in G$ et $x, y \in \mathbb{R}^n$. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$ la matrice de la forme bilinéaire $\langle\cdot|\cdot\rangle_G$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, de sorte que

$$\langle x|y\rangle_G = {}^t yMx \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

L'invariance de $\langle\cdot|\cdot\rangle_G$ signifie que ${}^t gMg = M$ pour tout $g \in G$. Comme $\langle\cdot|\cdot\rangle_G$ est un produit scalaire, $M$ est une matrice symétrique définie positive; il existe donc une matrice $N \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^t NN = M$. On a alors ${}^t g^t NNg = {}^t NN$ et donc ${}^t(NgN^{-1})(NgN^{-1}) = I_n$ pour tout $g \in G$. Ceci signifie que $NGN^{-1} \subset O(n)$.■

# 3 La mesure de Haar de $SU(2)$

Rappelons que $SU(2)$ est le groupe de Lie compact des matrices hermitiennes dans $M_2(\mathbb{C})$ de déterminant 1 :

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} \ : \ z, w \in \mathbb{C},\ |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\}.$$

Voici une manière de calculer explicitement sa mesure de Haar.

L'algèbre $\mathbb{H}$ des quaternions sur $\mathbb{R}$ peut être définie comme la sous-algbrè

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & -x_3 + ix_4 \\ x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix} \ : \ x_1, \ldots, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

de $M_2(\mathbb{C})$. Soit $S^3$ la sphère unité dans $\mathbb{R}^4$.

L'application $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{H}$, définie par

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & -x_3 + ix_4 \\ x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix},$$

est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Par restriction, $\Phi$ induit un homéomorphisme entre $S^3$ and $SU(2)$.

Chaque matrice $M \in SU(2)$ définit une transformation linéaire $\pi(M) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ donnée par:

$$\pi(M)x = \Phi^{-1}(M\Phi(x)), \qquad x \in \mathbb{R}^4.$$

On vérifie que $\|x\|^2 = \det \Phi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^4$. Il s'ensuit que $\pi(M) \in SO(4)$.

La mesure de Lebesgue $\lambda$ sur $S^3$ est donnée dans les coordonnées polaires

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos\theta \\ x_2 &= \sin\theta\cos\varphi \\ x_3 &= \sin\theta\sin\varphi\cos\psi \\ x_4 &= \sin\theta\sin\varphi\sin\psi \\ & \quad (0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \psi \le 2\pi) \end{aligned}$$

par l'expression $d\lambda(\theta, \varphi) = \sin^2\theta \sin\varphi d\theta d\varphi d\psi$. Comme $\lambda$ est invariante par le groupe de rotations $SO(4)$, il s'ensuit que la mesure image $\mu = \Phi_*(\lambda)$ de $\lambda$ par $\Phi : S^3 \to SU(2)$ est la mesure de Haar sur $SU(2)$.

# 4 Application aux chaines de Markov

Une chaine de Markov d'espace d'états fini $M = \{1, 2, \dots, n\}$ est caractérisée par sa matrice de transition $P = (p_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in M_n(\mathbb{R})$ qui est une matrice stochastique, c-à-d $0 \le p_{ij} \le 1$ pour tous $i, j$ et $\sum_j p_{ij} = 1$ pour tout $i$.

Soit $\mathrm{Prob}(M)$ l'espace des mesures de probabilité sur $M$. La matrice $P$ induit une transformation

$$\mathrm{Prob}(M) \to \mathrm{Prob}(M), \qquad \mu \mapsto \mu P,$$

où la mesure de probabilité $\mu P$ sur $M$ est définie par

$$\mu P(\{j\}) = \sum_i p_{ij}\mu(\{i\}) \qquad \forall 1 \le j \le n.$$

Une mesure de probabilité $\mu$ sur $M$ est dite invariante si $\mu$ est un point fixe pour cette transformation, c-à-d si on a $\mu P = \mu$.

**Théorème 5** *Il existe une mesure de probabilité $\mu$ invariante sur $M$.*

**Preuve** L'ensemble $\mathrm{Prob}(M)$ s'identifie à une partie convexe et compacte de $\mathbb{R}^n$. L'assertion est donc une application directe du théorème de Markov-Kakutani.■

# 5 Théorème du point fixe Markov-Kakutani: version générale

On déduit facilement du Théorème 1 la version générale du Théorème de Markov-Kakutani:

**Théorème 6** ***(Markov-Kakutani: version générale)*** *Soit $E$ un espace vectoriel normé et $K$ une partie convexe, bornée, fermée et non vide de $E'$. Soit $\mathcal{T}$ une famille d'applications $T : K \to K$ affines, continues pour la topologie $*$-faible et commutant deux-à-deux. Alors il existe un point fixe $x \in K$ commun à tous les $T \in \mathcal{T}$, c-à-d $Tx = x$ pour tout $T \in \mathcal{T}$.*

**Preuve** Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties finies et non vides de $\mathcal{T}$. Pour tout $F \in \mathcal{F}$, soit $\mathrm{Fix}_F \subset K$ l'ensemble des points fixes communs à tous les $T \in F$. On veut montrer que $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} \mathrm{Fix}_F \neq \emptyset$.

Comme chaque partie $\mathrm{Fix}_F$ est fermée dans le compact $K$ (toujours pour la topologie $*$-faible) et comme $\mathrm{Fix}_{F_1} \cap \mathrm{Fix}_{F_2} = \mathrm{Fix}_{F_1\cup F_2}$ pour $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, il suffit de montrer (propriété de l'intersection finie) que $\mathrm{Fix}_F \neq \emptyset$ pour tout $F \in \mathcal{F}$. Pour cela, on procède par récurrence sur le cardinal $n$ de $F$.

Le cas $n = 1$ est l'objet du Théorème 1; soit $n \geq 2$ et supposons l'assertion vraie pour tout élément de $\mathcal{F}$ de cardinal $n - 1$. Soit $F \in \mathcal{F}$ de cardinal $n$. Soit $S \in F$ quelconque et $F' = F \setminus \{S\}$. On observe que $\mathrm{Fix}_{F'}$ est convexe (car chaque $T$ est affine). De plus, $S(\mathrm{Fix}_{F'}) \subset \mathrm{Fix}_{F'}$. En effet, si $x \in \mathrm{Fix}_{F'}$, alors $T(Sx) = S(Tx) = Sx$ pour tout $T \in F'$, car les transformations de $\mathcal{T}$ commutent toutes entre elles. Par hypothèse de récurrence, $\mathrm{Fix}_{F'}$ est non vide. Par le Théorème 1, $S$ possède donc un point fixe $x$ dans $\mathrm{Fix}_{F'}$; il est clair que $x \in \mathrm{Fix}_F$. ■

**Remarque 7** L'hypothèse que le convexe $K$ est une partie du dual $E'$ d'un espace normé $E$, quoique suffisante pour de nombreuses applications, n'est pas très naturelle. Le "bon" cadre de l'énoncé est celui des espaces vectoriels topologiques localement convexes: le résultat est vrai si on suppose seulement que $K$ une partie convexe et compacte d'un espace vectoriel localement convexe $E$. Les arguments sont exactement les mêmes, à une exception près: dans le dernier pas de la preuve du Théorème 1, à la place de $v \in E$, il faut considérer une forme linéaire continue quelconque $\varphi$ sur $E$. On obtient alors $\varphi(Tx) = \varphi(x)$. Ceci étant vrai pour toute $\varphi \in E'$, la locale convexité de $E$ implique alors que $Tx = x$.