Université de Rennes 1–Année 2019/2020

L3—PSIN/PRB–Feuille de TD 9

Dans la suite, on dira qu'une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définit une densité de probabilité si $f \geq 0$, si f est continue sauf en au plus un nombre fini de points et si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ existe et est égale à 1.

Exercice 1. Soit X une v.a.r suivant la loi uniforme sur $[a, b]$ et soit $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$. Déterminer la loi de la v.a.r $Y = \alpha X + \beta$.

Exercice 2. Soit X une v.a.r suivant la loi uniforme sur $[-1, 1]$. Montrer que $Y = X^2$ suit une loi continue dont on déterminera la densité.

Exercice 3. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $t \mapsto e^{-|t|}/2$

(i) Montrer que f définit une densité de probabilité.

Soit X une v.a.r de densité f.

(ii) Calculer la fonction de répartition F_X de X.

(iii) Montrer que $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$ existent et les calculer.

Exercice 4. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie $f(x) = \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ pour $x \in [0, 1[$ et $f(x) = 0$ sinon.

(i) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

Soit X une v.a.r de densité f.

(ii) Montrer que X possède une espérance et la calculer.

(iii) Soit $Y = \arcsin(X)$. Déterminer la loi de Y et la reconnaître.

Exercice 5. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(t) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ pour tout $t \in]0, 1[$ et $f(t) = 0$ si $t \notin]0, 1[$.

(i) Montrer que f définit une densité de probabilité.

Soit X une v.a.r de densité f.

(ii) Calculer la fonction de répartition F_X de X.

(iii) Montrer que $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$ existent.

Exercice 6. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $t \mapsto \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

(i) Montrer que f définit une densité de probabilité.

Soit X une v.a.r de densité f.

(ii) Calculer la fonction de répartition F_X de X.

(iii) Montrer que X ne possède pas d'espérance.

Exercice 7. Soit X une v.a.r suivant une loi exponentielle de paramère λ. Déterminer la loi de la partie entière $[X]$ de X.

Exercice 8. On dit qu'une v.a.r X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ est sans mémoire si $\mathbf{P}(X > s) > 0$ et $\mathbf{P}(X > t + s | X > s) = \mathbf{P}(X > t)$ pour tous $t, s \geq 0$.

(i) Soit X une v.a.r de loi exponentielle. Montrer que X est sans mémoire.

(ii) **(*)** Soit X une v.a.r X à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$, à densité et sans mémoire. Montrer que X suit une loi exponentielle. (Indication : on pourra considérer la fonction continue h définie sur $\mathbf{R}$ par $h(x) = \log(\mathbf{P}(X > x))$.)