Université de Rennes 1–Année 2018/2019
L3—PSIN/PRB–Feuille de TD 8

Exercice 1. Soient a, b deux nombres réels non nuls tels que $a \neq \pm b$. Soient X une v. a. r. de loi uniforme sur $\{-a, a, b, -b\}$ et $Y = X^2$. Calculer les variances de X, Y et $X + Y$ respectivement. Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2. Soient X et Y deux v.a.r à valeurs dans $\mathbf{N}$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que

$$\mathbf{P}(X = i, Y = j) = \frac{a}{i!j!} \qquad \text{pour tout} \quad (i, j) \in \mathbf{N}^2.$$

(i) Déterminer la valeur de a.
(ii) Quelles sont les lois marginales de X et de Y?
(iii) X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 3. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et (X, Y) un couple de variables aléatoires avec $X(\Omega) = \{-1, 1\}, Y(\Omega) = \{1, 2\}$ et tel que

$$\mathbf{P}(X = -1) = 1/4, \quad \mathbf{P}(Y = 1) = 1/3.$$

Posons $p = \mathbf{P}(X = -1, Y = 1)$.
(i) Exprimer en fonction de p la loi conjointe de X et Y et présenter le résultat sous forme d'un tableau.
(ii) Quelles conditions doit-on imposer à p?
(iii) Déterminer p pour que X et Y soient indépendantes.
(iv) Calculer $\mathbb{E}(XY)$ quand p est comme dans (iii).

Exercice 4. À un péage autoroutier n voitures franchissent, au hasard et indépendamment les unes des autres, l'une des trois barrières numérotées $1, 2, 3$ mises à leur disposition. Soient X_1, X_2 et X_3 les v.a.r dénombrant les voitures ayant franchi ces barrières.
(i) Déterminer la loi de X_1.
(ii) Calculer les variances de X_1, X_2 et de $X_1 + X_2$.
(iii) En déduire la covariance de X_1 et X_2.

Exercice 5. Soient X et Y deux v. a. r indépendantes suivant toutes les deux une loi de Bernoulli de paramètre p. On note $q = 1 - p$, $S = X + Y$ et $D = X - Y$.
(i) Déterminer les loi de S et D ainsi que leurs espérances et variances.
(ii) Calculer $\mathbf{E}[SD]$. Les variables S et D sont-elles indépendantes ?

Exercice 6. Soient X et Y deux v.a.r sur un même espace probabilisé possédant toutes deux un moment d'ordre 2. On suppose que $\mathrm{Var}(X) > 0$. Déterminer $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tels que la quantité $\mathbb{E}\left((Y - (aX + b))^2\right)$ soit minimale.