Université de Rennes 1
Année 2019/2020

L3—PSIN/PRB
Feuille de TD 8

Exercice 1. À un péage autoroutier n voitures franchissent, au hasard et indépendamment les unes des autres, l'une des trois barrières numérotées $1, 2, 3$ mises à leur disposition. Soient X_1, X_2 et X_3 les v.a.r dénombrant les voitures ayant franchi ces barrières.
(i) Déterminer la loi de X_1.
(ii) Calculer les variances de X_1, X_2 et de $X_1 + X_2$.
(iii) En déduire la covariance de X_1 et X_2.

Exercice 2. Soient X une variable aléatoire discrète définie sur espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et soit $f : X(\Omega) \to \mathbf{R}$ une application. On pose $Y = f(X)$.
(i) Soit $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}(X = x) > 0$ et posons $y = f(x)$. Montrer que $\mathbf{P}(Y = y \mid X = x) = 1$.
(ii) Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que X et Y soient indépendantes.

Exercice 3. (*) Soient X et Y deux v.a.r sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ possédant toutes deux un moment d'ordre 2. On suppose que $\mathbf{Var}(X) > 0$. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.
(i) Exprimer $\mathbf{Var}(Y - (aX + b))$ comme polynôme du second degré en a.
(ii) On fixe $a \in \mathbf{R}$. Pour quelle valeur de b, la quantité $\mathbf{E}(Y - (aX + b))^2$ est-elle minimale ?
(iii) Déterminer $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tels que la quantité $\mathbf{E}\left((Y - (aX + b))^2\right)$ soit minimale.

Exercice 4. (*) Une pièce de monnaie amène "Pile" avec probabilité $p \in]0, 1[$ et "Face" avec probabilité $q = 1 - p$. On effectue des lancers successifs de cette pièce. Soit X_n la v.a.r. égale à 1 si on obtient "Pile" au n-ème lancer et 0 sinon. On pose $A_n = \{X_{n-1} \neq X_n\}$ pour $n \geq 2$.
(i) Soit $n \geq 2$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur p pour que A_n et A_{n-1} soient indépendants.
(ii) Donner une condition nécessaire et suffisante sur p pour que la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ soit indépendante.
(iii) Soit $T := \inf\{n \geq 2 \mid X_{n-1} \neq X_n\}$. Calculer $\mathbf{P}(T = n)$ pour $n \geq 1$ et montrer que $\mathbf{P}(T < +\infty) = 1$.
(iv) On définit la v.a.r. X_T par $X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$ (voir TD 5, Exercice 1). Calculer $\mathbf{P}(X_T = 0, X_{T+1} = 1)$ et $\mathbf{P}(X_T = 1, X_{T+1} = 0)$. Quand ces deux probabilités sont-elles égales ?