Université de Rennes 1
Année 2019/2020

L3—PSIN/PRB
Feuille de TD 7

Exercice 1. (*) On jette 5 dés. On met de côté les dés qui affichent un "6" et on recommence. De nouveau, on met de côté les dés qui affichent un "6" et ainsi de suite. Le jeu s'arrête quand il n'y a plus de dé. Soit N la v.a.r. égale à la durée du jeu.
(i) Exprimer N en fonction des v.a.r. $X_1, \ldots, , X_5$, où la v.a.r X_i est égale au moment d'apparition du "6' sur le dé de numéro $i \in \{1, \ldots, 5\}$.
(ii) Quelle est la loi de X_i pour $i \in \{1, \ldots, 5\}$?
(iii) Déterminer la fonction de répartition de N.
(iv) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(N)$ de N.
(*Indication :*on pourra utiliser la formule de l'Exercice 9, Feuille TD 5)

Exercice 2. Soient a, b deux nombres réels avec $a \neq b$ et $a, b \notin \{0, \pm 1\}$, X une v. a. r. de loi uniforme sur $\{-a, a, b, -b\}$ et $Y = X^2$.
(i) Calculer les variances de X, Y et $X + Y$ respectivement.
(ii) Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 3. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et (X, Y) un couple de variables aléatoires avec $X(\Omega) = \{-1, 1\}, Y(\Omega) = \{1, 2\}$ et tel que

$$\mathbf{P}(X = -1) = 1/4, \quad \mathbf{P}(Y = 1) = 1/3.$$

Posons $p = \mathbf{P}(X = -1, Y = 1)$.
(i) Exprimer en fonction de p la loi conjointe de X et Y et présenter le résultat sous forme d'un tableau.
(ii) Quelles conditions doit-on imposer à p?
(iii) Déterminer p pour que X et Y soient indépendantes.
(iv) Calculer $\mathbb{E}(XY)$ quand p est comme dans (iii).

Exercice 4. Soient X et Y deux v.a.r à valeurs dans $\mathbf{N}$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que

$$\mathbf{P}(X = i, Y = j) = \frac{a}{i!j!} \qquad \text{pour tout} \quad (i, j) \in \mathbf{N}^2.$$

(i) Déterminer la valeur de a.
(ii) Quelles sont les lois marginales de X et de Y?
(iii) X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 5. Soient X et Y deux v. a. r indépendantes suivant toutes les deux une loi de Bernoulli de paramètre p. On considère les v.a.r. $S = X + Y$ et $D = X - Y$.
(i) Déterminer les loi de S et D ainsi que leurs espérances et variances.
(ii) Calculer $\mathbf{E}[SD]$.
(iii) Les variables S et D sont-elles indépendantes ?

Exercice 6. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et que, pour $n \in \mathbf{N}$, la loi de Y sachant $\{X = n\}$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
(i) Déterminer la loi conjointe de (X, Y).
(ii) Reconnaître la loi de Y.

Exercice 7. (*) Soient X et Y deux v.a.r indépendantes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et suivant des lois géométriques de paramètres p_1 et p_2. On considère la matrice aléatoire

$$A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix},$$

c-à-d l'application $\Omega \to M_2(\mathbf{R})$ définie par $A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 1 \\ 0 & Y(\omega) \end{pmatrix}$ pour tout $\omega \in \Omega$.
(i) Déterminer l'évènement "A est diagonalisable" en fonction de X et Y.
(ii) Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable ?