Université de Rennes 1–Année 2019/2020

L3—PSIN/PRB–Feuille de TD 6

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et soit $A \in \mathbf{F}$. Soit $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice de A. Montrer que $\mathbf{1}_A$ est une v.a.r. sur Ω et calculer son espérance.

Exercice 2. Soit X un v.a.r suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Soit $\lambda \geq 0$. Montrer que la v.a.r. $e^{-\lambda X}$ possède une espérance et la calculer.

Exercice 3. Soient X et Y deux v.a.r indépendantes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et suivant toutes deux une même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Déterminer la loi de la v.a.r $Z = X + Y$.

Exercice 4. Soient X et Y deux v.a.r indépendantes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et suivant des lois de Poisson de paramètres λ et μ. Déterminer la loi de la v.a.r $Z = X + Y$.

Exercice 5. Une marque de céréales offre, dans chaque paquet, un autocollant. La collection comporte n autocollants différents, dont des exemplaires sont uniformément répartis sur l'ensemble des paquets. Un collectionneur achète chaque semaine un paquet. Pour tout $k \in \mathbf{N}, 1 \leq k \leq n$, on note X_k le nombre de semaines qui lui sont nécessaires pour obtenir la première fois k autocollants différents. La collection est donc complète après X_n semaines.
(i) Quel est l'ensemble des valeurs de X_1 et de X_k pour $k \geq 2$.
(ii) On pose $T_k = X_k - X_{k-1}$ pour $k \in \mathbf{N}, 1 \leq k \leq n$, en convenant que $X_0 = 0$. Quelle est la signification de T_k?
(iii) Calculer $\mathbf{P}(T_k = i | T_{k-1} = j)$, pour tous $i, j \in \mathbf{N}^*$.
(iv) Déterminer la loi de T_k et la reconnaître.
(v) Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(X_n)$ de X_n.
(vi) Donner un équivalent de $\mathbb{E}(X_n)$ pour $n \to +\infty$.

Exercice 6. On suppose que le nombre N d'enfants dans une famille suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose que les naissances sont indépendantes les unes des autres et qu'à chaque naissance, la probabilité que l'enfant soit une fille est $p \in]0, 1[$. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de filles dans la famille.
(i) Calculer $\mathbf{P}(N = n)$ pour $n \in \mathbf{N}$?
(ii) Calculer $\mathbf{P}(X = k | N = n)$ pour des entiers naturels k et n.
(iii) Déterminer la loi de X et la reconnaître ; en déduire $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 7. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $X_1, \ldots, X_k$ des v.a.r. indépendantes et de même loi. Soient $Y = \max_{1 \leq i \leq k} X_i$ et $Z = \min_{1 \leq i \leq k} X_i$.
(i) Montrer que Y et Z sont des variables aléatoires.
(ii) Déterminer les fonctions de répartition F_Y et F_Z de Y et Z.
(iii) Expliciter F_Y et F_Z lorsque $X_1, \ldots, X_r$ suivent une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.