Université de Rennes 1

Année 2019/2020

L3—PSIN/PRB
Feuille de TD 5

Exercice 1. **(*)** Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de v.a.r. sur Ω. Soit N une v.a.r sur Ω à valeurs dans $\mathbf{N}$. On définit $Y : \Omega \to \mathbf{R}$ par

$$Y(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega) \qquad \text{pour tout} \quad \omega \in \Omega.$$

Montrer que Y est une v.a.r. sur Ω.

Exercice 2. Soit X une v.a.r prenant les valeurs 2, 4, 6, ou 8.
(i) Déterminer la loi de X sachant que

$$\mathbf{P}(X < 6) = \frac{1}{3}, \mathbf{P}(X > 6) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X = 2) = \mathbf{P}(X = 4).$$

(ii) Quelle est la loi de $|X - 6|$?

Exercice 3. Un urne contient des boules numérotées : 7 boules sont marquées du chiffre 1, 5 boules du chiffre 3, et 3 boules du chiffre 5. On tire une boule au hasard et l'on appelle X sa marque.
(i) Quelle est la loi de X ?
(ii) Calculer est son l'espérance et la variance de X.
(ii) Que vaut $\mathbb{E}(|X - 2|)$?

Exercice 4. Soit X un v.a.r d'espérance 3 et de variance 2. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ pour $Y = (X - 2)^2$.

Exercice 5. Une v.a.r X prend des valeurs entières comprises entre 1 et 6. On sait qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\mathbf{P}(X = k) = \alpha k$ pour tout $k \in \{1, \ldots, 6\}$.
(i) Quelle est la loi de X ? Calculer son espérance et sa variance.
(ii) Quelle est la loi de $1/X$?

Exercice 6. Un station service fait chaque semaine le plein de son réservoir. Une analyse statistique montre que la demande hebdomadaire des clients, en milliers de litres, est bien approchée par une v.a.r. discrète D dont la loi est donnée par $\mathbf{P}(D = k) = (1 - p)^{k-1}p$ pour tout $k \geqslant 1$, avec $p = 9/10$.

Quel doit être la contenance du réservoir de la station pour garantir que la probabilité d'être à court d'essence soit inférieure à 10^{-5} ?

Exercice 7. Un test de type QCM comporte 20 questions et, pour chacune d'elles, propose 4 réponses, dont seule une est correcte. Le candidat doit cocher une seule réponse à chaque question. La note obtenue est le nombre de bonnes réponses. Soit X la variable aléatoire donnant la note d'un candidat répondant au hasard et de façon équiprobable à toutes les questions.
(i) Déterminer la loi de X.
(ii) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbf{Var}(X)$.

Exercice 8. Soit X une v.a.r dont l'ensemble des valeurs est $\mathbf{Z}^*$ et dont la loi donnée par $\mathbf{P}(X = k) = 2^{-|k|-1}$ pour tout $k \in \mathbf{Z}^*$.
(i) Déterminer la loi de la v.a.r $Y = |X|$.
(ii) Déterminer la loi de la v.a.r $Z = 2 + \pi \cos(\pi X)$.

Exercice 9. (*) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. Montrer que X admet une espérance si, et seulement si, la série de terme général $\mathbf{P}(X > n)$ converge et que, dans ce cas, on a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > n).$$

(Indication : Ecrire $\mathbf{P}(X > n)$ sous forme de série infinie.)

Exercice 10. Soit X une v.a.r sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Déterminer la probabilité que la valeur de X soit paire

Exercice 11. Soit X une v.a.r sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right)$.

Exercice 12. Soit X une v.a.r sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)$.