Université de Rennes 1–Année 2019/2020
L3–PSIN/PRB–Feuille de TD 4

Exercice 1. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $A \in \mathcal{F}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit pas indépendant avec lui-même.

Exercice 2. Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une hasard et on considère les évènements :

$A =$ «le numéro tiré est pair» et $B =$ «le numéro tiré est un multiple de 3».

(i) Les évènements A et B sont-ils indépendants ?
(ii) Répondre à la question (i) avec une urne contenant 13 boules.

Exercice 3. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $A, B, C \in \mathcal{F}$ trois évènements.

On suppose que A et B sont indépendants ainsi que A et C. Montrer, par un contre-exemple, que les évènements A et $B \cup C$ ne sont pas nécessairement indépendants. Même question pour A et $B \cap C$.

(Indication : On pourra considérer des évènements convenables dans $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ muni de la probabilité uniforme).

Exercice 4. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé
(i) Soient $A, B \in \mathcal{F}$ deux évènements indépendants. Montrer que A^c et B sont indépendants.
(ii) Soient $A, B \in \mathcal{F}$ deux évènements indépendants. Montrer que A^c et B^c sont indépendants.
(iii) Soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ des évènements mutuellement indépendants. Pour chaque $i = 1, \ldots, n$, soit $B_i = A_i$ ou $B_i = A_i^c$. Montrer que $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{F}$ sont des évènements mutuellement indépendants.
(iv) Soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ des évènements mutuellement indépendants. Montrer que la probabilité qu'aucun des A_i ne soit réalisé est inférieure à $\exp(-\sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i))$.

Exercice 5. (*) Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'évènements dans $\mathcal{F}$. Pour la définition des évènements $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$, voir feuille de TD 2.
(i) On suppose que la série $\sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(A_n)$ est convergente. Montrer que $\mathbf{P}(\limsup A_n) = 0$.
(ii) On que les évènements A_n sont mutuellement indépendant et que la série $\sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(A_n)$ est divergente. Montrer que $\mathbf{P}(\liminf A_n^c) = 0$ et donc $\mathbf{P}(\limsup A_n) = 1$. (Indication : utiliser l'exercice 5.iv).

Exercice 6. On dispose de trois urnes et de trois boules. On place chacune des boules au hasard dans l'une des urnes. Soit X la v.a.r égale au nombre d'urnes qui ne sont pas vides. Déterminer la loi de X et sa fonction de répartition.

Exercice 7. Un trousseau de n clefs contient une seule clef ouvrant une serrure donnée. On les essaie l'une après l'autre au hasard. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'essais nécessaires.
(i) Calculer la loi, l'espérance et la variance de X.
(ii) On réessaie à chaque fois une clef au hasard sans avoir nécessairement écarté la précédente. Répondez à la question (i).

Exercice 8. Un joueur jette simultanément deux dés. A l'issue du jeu, il gagne une somme X égale à la différence entre le plus grand et le plus petit des points marqués.
(i) Déterminer la loi de la v.a.r X ainsi que sa fonction de répartition F_X. Tracer le graphe de F_X.
(ii) Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 9. Soit $N \geq 1$ un entier. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On effectue $n \geq 1$ tirages successifs avec remise. Soit X la v.a.r égale au plus grand des numéros obtenus.

Déterminer la fonction de répartition de X. En déduire la loi de X.

Exercice 10. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $A, B \subset \mathcal{F}$ deux évènements. On considère la v.a.r. X sur Ω définie par $X(\omega) = 1$ si ω réalise un et un seul des évènements A ou B et $X(\omega) = 0$ sinon. On pose $p_1 = \mathbf{P}(A)$, $p_2 = \mathbf{P}(B)$, $p_3 = \mathbf{P}(A \cap B)$.

Déterminer la loi de X ainsi que son espérance et sa variance, en fonction de p_1, p_2, p_3. En déduire les inégalités

$$\frac{p_1 + p_2 - 1}{2} \leq p_3 \leq \frac{p_1 + p_2}{2}.$$

et étudier les cas d'égalité.

Exercice 11. Soient X une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p et $P \in \mathbf{R}[x]$ un polynôme. Montrer que

$$P(X) = (P(1) - P(0))X + P(0)$$

et en déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice 12. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et X une v.a.r. sur Ω à valeurs dans $\mathbf{N}$. On suppose qu'il existe $q \in]0, 1[$ tel que

$$\mathbf{P}(X = n) = q\mathbf{P}(X \geq n) \qquad \text{pour tout} \quad n \in \mathbf{N}.$$

Déterminer la loi de X.