Université de Rennes 1–Année 2019/2020

L3–PSIN/PRB

Feuille de TD 3

Exercice 1. (*) (i) Soit Ω un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{F}$ et soient A, B deux parties appartenant à $\mathcal{F}$. On définit $A_{2n} = A$ et $A_{2n+1} = B$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Déterminer la limite inférieure $\liminf A_n$ et la limite supérieure $\limsup A_n$ (voir feuille TD 2, Exercice 9)
(ii) Soit $\mathbf{P}$ une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite dans $\mathcal{F}$. Montrer que

$$\mathbf{P}(\liminf B_n) \leq \liminf \mathbf{P}(B_n) \quad \text{et} \quad \limsup \mathbf{P}(B_n) \leq \mathbf{P}(\limsup B_n).$$

(iii) Donner un exemple où les inégalités précédentes sont strictes.

Exercice 2. Une assemblée comporte 60 % de femmes ; une femme sur trois dans cette assemblée porte des lunettes et un homme sur deux porte des lunettes. Quelle est la probabilité pour qu'un porteur de lunettes pris au hasard soit une femme ?

Exercice 3. Deux joueurs A et B s'exercent au tir à l'arc. Le joueur A ne tire qu'une fois sur 3 et atteint sa cible 9 fois sur 10 quand il tire. Le joueur B, moins adroit, n'atteint sa cible que 6 fois sur 10. Un des joueurs tire.
(i) Quelle est la probabilité pour que la cible soit atteinte ?
(ii) Sachant que la cible est atteinte, quelle est la probabilité pour que ce soit par B?

Exercice 4. Dans un étang, il y a des poissons rouges et des poissons verts. Les poissons trop petits sont remis à l'eau par les pêcheurs. On estime qu'il y a 60 % de poissons rouges dans l'étang, que la moitié des poissons rouges et le tiers des poissons verts sont trop petits.
(i) Quelle est la probabilité de pêcher un poisson trop petit ?
(ii) Sachant qu'on a pêché un poisson trop petit, quelle est la probabilité que ce soit un poisson rouge ?

Exercice 5. Une urne contient 4 boules rouges et 3 vertes.
(i) On tire successivement sans remise deux boules dans l'urne. Sachant qu'au premier tirage, on a obtenu une boule rouge, quelle est la probabilité qu'on obtienne une boule verte au deuxième tirage ?
(ii) Répondre à la même question quand on suppose que le tirage se fait avec remise.

Exercice 6. Dans une usine, 1% des articles produits sont défectueux. Un contrôle de qualité permet de rejeter 95% des articles lorsqu'ils sont défectueux mais aussi de rejeter 2% des articles qui ne le sont pas.
(i) Quelle est la probabilité qu'il y ait un erreur dans le contrôle de qualité ?
(ii) Quelle est la probabilité pour qu'un article accepté soit en réalité défectueux ?

Exercice 7. (*) On considère $n \geq 1$ individus $A_1, \ldots, A_n$. On lance une pièce de monnaie et on transmet le résultat ("Pile" ou "Face") à A_1. Le résultat est transmis par A_1 à A_2, ensuite par A_2 à A_3, etc. On suppose que tous ces individus mentent avec la probabilité p et qu'ils le font de manière mutuellement indépendante. Soit p_n la probabilité que le résultat reçu par A_n soit le bon.
(i) Etablir une formule de récurrence reliant p_{n+1} et p_n pour $n \geq 1$.
(ii) Calculer p_n.
(iii) Quelle est la limite $\lim_{n\to\infty} p_n$?

Exercice 8. (*) Votre voisin oublie fréquemment ses clés. Pour tout $n \geq 1$, soit p_n la probabilité qu'il oublie ses clés le jour n. On suppose que $p_1 = a$ est connu et que si le jour n il oublie ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité 1/10; si le jour n il n'oublie pas ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité 4/10.
(i) Etablir une formule de récurrence reliant p_{n+1} et p_n pour $n \geq 1$.
(ii) Déterminer p_n pour tout $n \geq 1$.