Université de Rennes 1–Année 2019/2020
L3—PSIN/PRB—Feuille de TD 2

Exercice 1. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(A_1,\ A_2,\ A_3) \in \mathcal{F}^3$. On pose, pour $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$,

$$p_i = \mathbf{P}(A_i),\ p_{ij} = \mathbf{P}(A_i \cap A_j),\ p_{123} = \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Exprimez en fonction de ces probabilités les probabilités suivantes :
1) les trois évènements se réalisent ; 2) au moins l'un des évènements se réalise ; 3) au moins deux des évènements se réalisent ; 4) A_1 seul se réalise ; 5) A_1 et A_2 se réalisent mais pas A_3 ; 6) deux évènements au plus se réalisent ; 7) un seul évènement se réalise ; 8) deux évènements seulement se réalisent ; 9) deux évènements ou plus se réalisent ; 10) aucun des trois évènements ne se réalise.

Exercice 2. Soient Ω_1, Ω_2 deux ensembles et $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ une application.
(i) **(Tribu image réciproque)** Soit $\mathcal{F}_2$ une tribu sur Ω_2. Montrer que $f^{-1}(\mathcal{F}_2) := \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{F}_2\}$ est une tribu sur Ω_1.
(ii) **(Tribu image)** Soit $\mathcal{F}_1$ une tribu sur Ω_1. Montrer que $f(\mathcal{F}_1) := \{B \in \mathcal{P}(\Omega_2) \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1\}$ est une tribu sur Ω_2.
(iii) Soit $\mathcal{F}_1$ une tribu sur Ω_1 et $\mathbf{P}_1$ une mesure de probabilité sur $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$. On définit $\mathbf{P}_2 : f(\mathcal{F}_1) \to \mathbf{R}$ par $\mathbf{P}_2(B) = \mathbf{P}_1(f^{-1}(B))$, pour tout $B \in f(\mathcal{F}_1)$. Montrer que $\mathbf{P}_2$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega_2, f(\mathcal{F}_1))$.

Exercice 3. (i) Combien de numéros de téléphone composés de 10 chiffres existe-t-il ?
(ii) Combien y a-t-il de mains de 13 cartes dans un jeu de 52 cartes ?
(iii) Après les prolongations d'un match de football, l'entraîneur doit choisir les 5 tireurs de penaltys parmi les 11 joueurs de son équipe et l'ordre de leur passage. Combien de choix a-t-il ?

Exercice 4. On lance trois fois une pièce de monnaie. Expliciter l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ qui modélise cette expérience aléatoire.
— Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une fois face ?
— Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois face ?
— Quelle est la probabilité d'obtenir pile au 1er lancer et au moins une fois face lors des deux suivants ?
— Quelle est la probabilité d'obtenir pile au 1er lancer et face au 3e ?

Exercice 5. Proposer un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ qui modélise les expériences aléatoires suivantes :

- On distribue à un joueur 13 cartes d'un jeu de 52 cartes correctement battues.
- On joue à pile ou face jusqu'à obtenir face.

Exercice 6. (i) Combien de fois faut-il lancer un dé équilibré pour avoir au moins une chance sur deux d'obtenir un « six » ?
(ii) Même question avec deux dés pour obtenir un « double-six ».
(iii) Lequel des deux évènements suivant est le plus probable :
- « obtenir au moins un « six » en lançant 4 fois un dé »
- « obtenir au moins un « double-six » en lançant 24 fois une paire de dés » ?

Exercice 7. Au loto, on tire six numéros entre 1 et 49, deux-à-deux distincts et sans tenir compte de leur ordre. Calculez les probabilités des évènements suivants, pour $0 \leq k \leq 6$:
- «Avoir exactement k bons numéros »
- « Avoir zéro, un ou deux bons numéros'»
- « Avoir au moins trois bons numéros »

Exercice 8. Pour $r \leq n$, on répartit aléatoirement r boules à l'intérieur de n urnes, chaque urne pouvant contenir plusieurs boules. Expliciter l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ qui modélise cette expérience aléatoire.
(i) Déterminer la probabilité de l'évènement « chaque urne contient au plus une boule ».
(ii) Déterminer la probabilité de l'évènement « il existe une urne contenant au moins deux boules ».

Exercice 9. (Limites supérieure et inférieure d'évènements) Soit $\mathcal{F}$ une tribu sur un ensemble Ω et $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite infinie d'évènements dans $\mathcal{F}$. La *limite inférieure* $\liminf A_n$ est l'ensemble des $\omega \in \Omega$ qui appartiennent à tous les A_n, à partir d'un certain rang. La *limite supérieure* $\limsup A_n$ est l'ensemble des $\omega \in \Omega$ qui appartiennent à A_n pour une infinité de $n \in \mathbf{N}$.
(i) Montrer que

$$\liminf A_n = \bigcup_{N\in\mathbf{N}} \bigcap_{n\geq N} A_n \qquad \text{et} \qquad \limsup A_n = \bigcap_{N\in\mathbf{N}} \bigcup_{n\geq N} A_n.$$

et en déduire que $\liminf A_n$ et $\limsup A_n$ appartiennent à $\mathcal{F}$.
(ii) Montrer que $(\limsup A_n)^c = \liminf(A_n^c)$.