

Université de Rennes 1—Année 2019/2020
L3—PSIN/PRB—Feuille de TD 11

Exercice 1. Une équipe de surveillance cherche à savoir si les huîtres d'un certain bassin ont été contaminées. Sur un échantillon de 200 huîtres, elle dénombre 32 huîtres atteintes. Déterminer un intervalle de confiance, au risque de 5%, pour la proportion d'huîtres contaminées dans le bassin.

Exercice 2. Deux personnes A et B se donnent rendez-vous à un endroit entre 0h et 1h. On suppose que chacune arrive indépendamment de l'autre à un instant aléatoire suivant une loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1])$. Soient X et Y les instants d'arrivée de A et de B respectivement.

- (i) Quelles sont les lois de X et de Y ?
- (ii) Soit T le temps d'attente de la 1ère personne arrivée. Exprimer T en fonction de X et Y . Quelle est le temps d'attente moyen de la 1ère personne arrivée ?
- (iii) Soient U et V les heures d'arrivée successives des deux personnes. Exprimer U et V en fonction de X et Y .
- (iv) Déterminer les lois de U et V .
- (v) Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(U, V)$. (Indication : on remarquera que $U + V = X + Y$.)

Exercice 3. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes et suivant chacune une loi normale centrée-réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. Soit T la v.a.r définie sur $\{Y \neq 0\}$ par $T = X/Y$ et par $T = 0$ sur $\{Y = 0\}$.

Déterminer la fonction de répartition de T . Montrer que T possède une densité et la déterminer.

Exercice 4. Soit $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^+$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)} & \text{si } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- (i) Vérifier que $\int_{\mathbf{R}^2} f(x, y) dx dy = 1$.
Soit (X, Y) un couple de v.a.r de densité f .
- (ii) Déterminer la densité f_X de X .
- (iii) Calculer la densité $f|_{Y|X=x}$ pour $x > 0$ et déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(Y|X = x)$.
- (iv) Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(Y|X)$.