Université de Rennes 1–Année 2019/2020

L3—PSIN/PRB–Feuille de TD 10

Exercice 1. Soit X une v.a.r suivant la loi uniforme sur $[0, \pi]$. Montrer que $Y = \cos(X)$ suit une loi continue dont on déterminera la densité.

Exercice 2. Soit X v.a.r continue de loi sur $[-1, 1]$. Déterminer la loi de $Y = f(X)$ pour $f :]-1, 1[\to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}\log(\frac{1+x}{1-x})$.

Exercice 3. Soit X une v.a.r suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et soit $Y = X^2$.
(i) Déterminer une densité g de Y.
(ii) Calculer, en justifiant leur existence, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.

Exercice 4. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.
(i) Justifier l'existence de I_n et établir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n pour $n \in \mathbf{N}$.
(ii) Calculer I_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
Soit X une v.a.r. qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
(iii) Calculer, pour tout $n \geq 1$, le moment $\mathbb{E}(X^n)$ d'ordre n de X.

Exercice 5. (*) Des clients arrivent à un guichet de manière aléatoire. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $t > 0$, le nombre de clients arrivant entre les instants 0 et $t > 0$ est une v.a.r. N_t qui suit une loi de Poisson de paramètre αt. Soit X_1 l'instant d'arrivée du premier client.
(i) Déterminer $\mathbf{P}(X_1 > t)$ et en déduire que X_1 suit une loi exponentielle.
(ii) Calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathrm{Var}(X_1)$.
(iii) Pour $n \geq 1$, soit X_n l'instant d'arrivée du n-ième client. Déterminer $\mathbf{P}(X_n > t)$ et en déduire la fonction de répartition de X_n.
(iv) Montrer que X_n est une v.a. continue et en déterminer une densité. En utilisant l'Exercice 4, calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathrm{Var}(X_n)$.

Exercice 6. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{F}$ tels $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ et $\mathbf{P}(\Omega_1) = \mathbf{P}(\Omega_2)$. Pour $n \geq 1$, soit $X_{2n} = \mathbf{1}_{\Omega_1}$ et $X_{2n+1} = \mathbf{1}_{\Omega_2}$.
(i) Déterminer la loi de X_n.
(ii) Déduire de (i) que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X_1$.
(iii) Calculer $\mathbf{P}(|X_{2n} - X_1| \geq 1)$.
(iv) Déduire de (iii) que $(X_n)_n$ ne converge pas en probabilité vers X_1.

Exercice 7. Un livre de 100 pages contient 1000 erreurs, réparties aux hasard selon les pages. On ouvre le livre et on compte le nombre X d'erreurs contenues dans une page.
(i) Identifier la loi de X. Quelle est l'espérance de X ? Quelle est sa variance ?
(ii) Donner une majoration de $\mathbf{P}(X > 20)$ au moyen l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
(iii) En approchant la loi de X par une loi de Poisson, essayer de donner une valeur approchée de la probabilité $\mathbf{P}(X > 20)$.
(iv) En approchant la loi de X par une loi normale, donner une valeur approchée de la probabilité $\mathbf{P}(X > 20)$.